توجيهي علمي

الوحدة (5)

المتجهات

شرح مفصل
حل جميع اسئلة الوحدة
مدرسة سمر الثانوية للبنين
رافت صافي

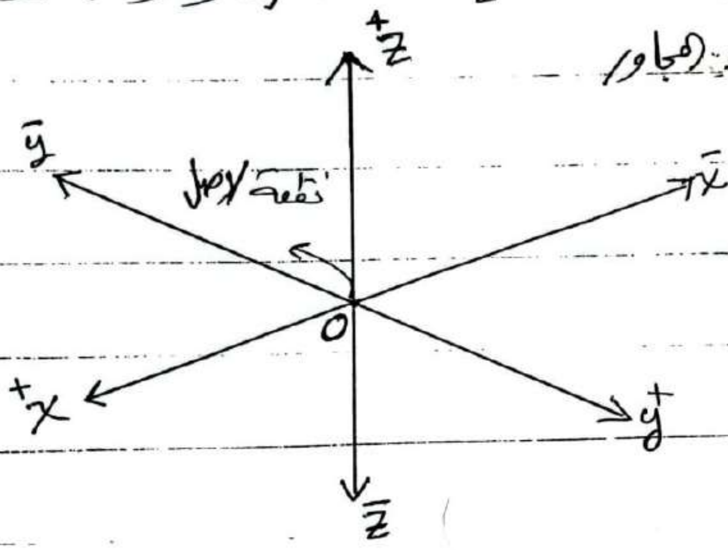
المتجهات في الفضاء (الدرس 1)

أولاً: تمثيل النقاط في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد

مقدمة:

درسنا سابقاً تعيين (5 , 2) مثلاً في المستوى الإحداثي

لكن في هذا الدرس سنتعلم كيف نحدد موقع نقطة (a , b , c) في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد المجاور



خطوات التعيين

1) نعين أولاً (a , b) في المستوى xy حيث نحدد نقطة a على محور x ونرسم خط متقطع يوازي محور y ونعين b على محور y ونرسم خط متقطع يوازي محور x

2) عند تقاطع الخطان المتقطعان نتحرك الى أعلى إذا كانت c موجب او الى أسفل إذا كانت c سالب

مثال: عين كل نقطة في كل مما يلي في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد

a) (-3 , 2 , 4) b) (1 , 0 , -4) c) (-4 , -2 , 3)

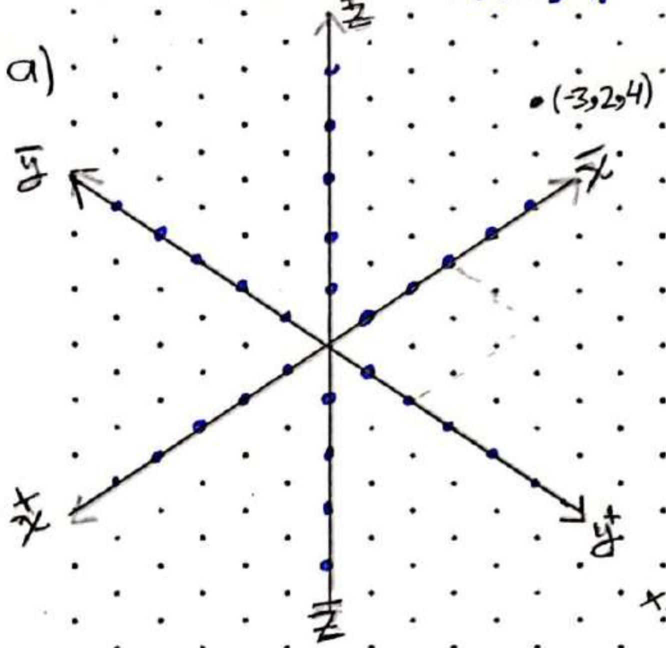
الحل: الأفضل استخدام الورق المنقط

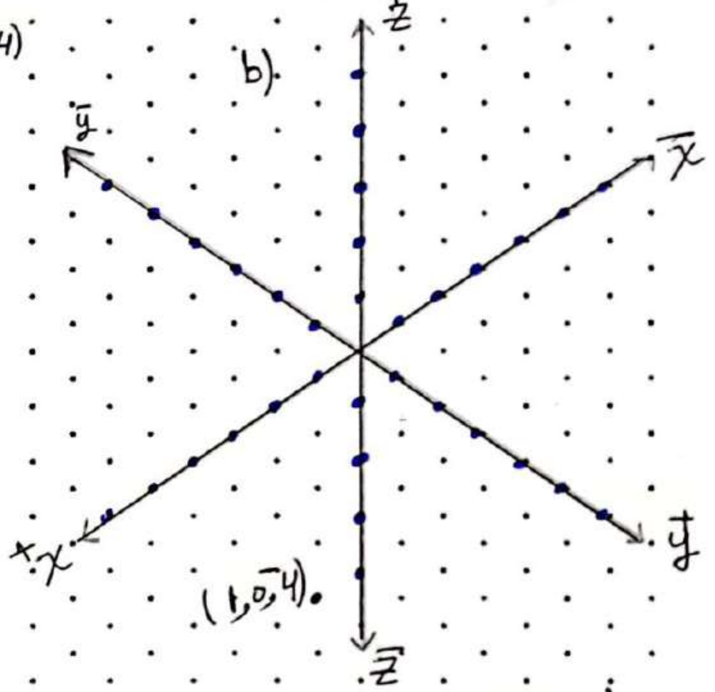
رأفت ضاحي

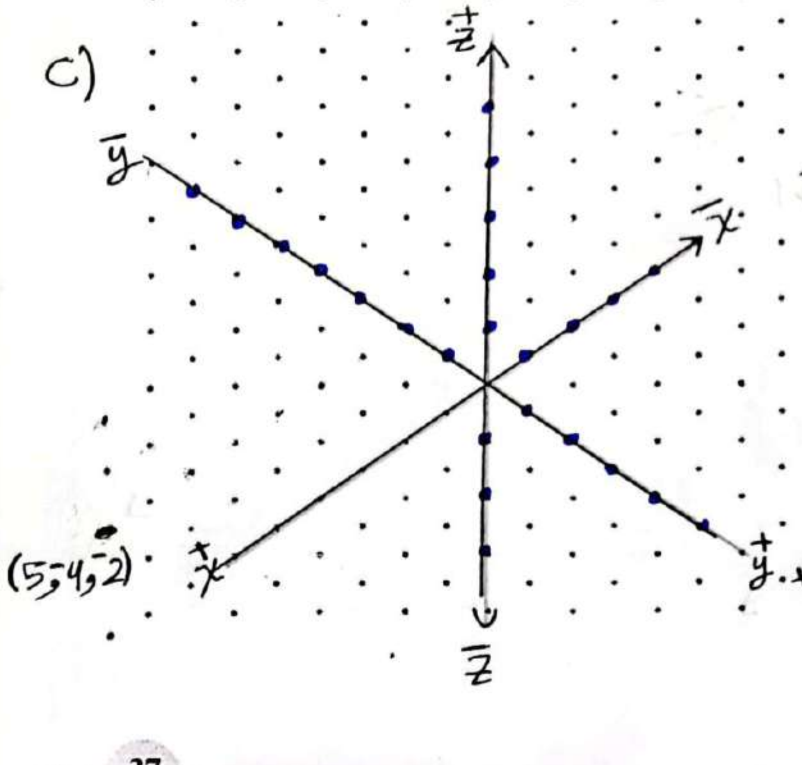
أتحقق من فهمي ص

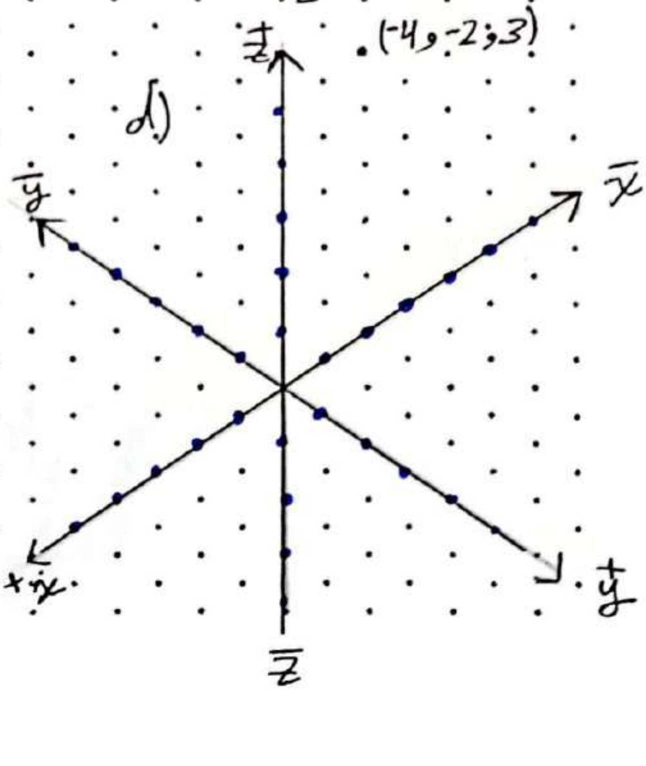
عيّن كلاً من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد

a) $(-3, 2, 4)$. b) $(1, 0, -4)$. c) $(5, -4, -2)$. d) $(-4, -2, 3)$









ثانياً: المسافة بين نقطتين واحداثيات نقطة المنتصف في الفضاء

اذا كان $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ فان :

المسافة بين النقطتين A و B تعطى بالصيغة

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

واحداثيات نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي :

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

مثال : اذا كانت $M(5,3,-1)$ و $N(2,-1,6)$ جد

a) المسافة بين M و N

b) احداثيات نقطة منتصف $\overline{MN}$

الحل :

$$MN=\sqrt{(5-2)^2+(3+1)^2+(-1-6)^2}$$
$$=\sqrt{9+16+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

احداثيات المنتصف ولتكن K

$$K\left(\frac{2+5}{2},\frac{-1+3}{2},\frac{6+1}{2}\right)$$
$$K\left(\frac{7}{2},1,\frac{7}{2}\right)$$

ملاحظة

الرمز $\overline{AB}$ يدل على القطعة المستقيمة الواصلة بين A و B

أما AB يدل على المسافة بين A و B ((طول القطعة المستقيمة))

رأفت ضاحي

التحقق من فهمي ص 113

اذا كان $M(5,-3,6)$ و $N(2,1,-6)$ فاجد كلاً مما يأتي :-

a) المسافة بين N و M

b) احداثيات نقطة منتصف $\overline{MN}$

الحل :-

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ (2, & 1, & -6) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ (5, & -3, & 6) \end{matrix}$$

a) $MN = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

$MN = \sqrt{(5-2)^2+(-3-1)^2+(6+6)^2}$

$MN = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$

b) لتكن K منتصف القطعة المستقيمة $\overline{MN}$

$K = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

$K = \left(\frac{2+5}{2}, \frac{1-3}{2}, \frac{-6+6}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, -1, 0\right)$

تدريب :- اذا كان $A(2c, 2c, 5)$ و $B(-1, -2, 0)$

وكان $AB = 5\sqrt{2}$ ، جد قيم الثابت c

$\left(1, \frac{-5}{2}\right)$

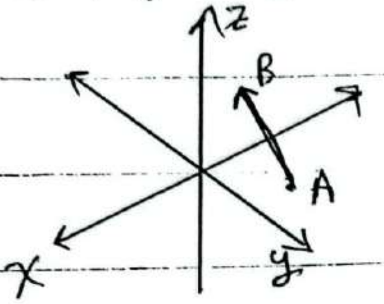
المتجهات في الفضاء

تذكير :

1) يرمز للمتجه بحرفين فوقهما الرمز ← أو حرف غامق فوقه الرمز ←

2) لتمثيل المتجه $\vec{V}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$ في الفضاء ، نتبع نفس خطوات التمثيل في المستوى الاحداثي وذلك برسم بدايته A ونهايته B كما في الشكل المجاور

ويرمز اليه بالرمز $\vec{AB}$ أو الرمز $\vec{V}$



اولاً : كتابة المتجه بالصورة الاحداثية وايجاد مقداره

1) يمكن كتابة المتجه بالصورة الاحداثية عن طريق طرح احداثيات نقطة البداية من احداثيات نقطة النهاية كما يلي

$$\vec{V} = \vec{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1 \rangle = \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle$$

مقدار الازاحة بالنسبة الى محور x — محور y — محور z

2) مقدار المتجه أو طول المتجه :

يرمز الى مقدار المتجه $\vec{AB}$ بالرمز $|\vec{AB}|$ ونجده كما يلي

$$|\vec{AB}| = |\vec{V}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

اذا اعطى احداثيات نقطة البداية والنهاية

أما اذا كان $\vec{V} = \vec{AB} = \langle v_1 , v_2 , v_2 \rangle$ فإن

$$|V| = |\vec{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

مثال :- اذا كان $A(-3,6,1)$ و $B(4,5,-2)$:

1) اكتب المتجه $\overrightarrow{AB}$ بالصورة الاحداثية

2) جد $|\overrightarrow{AB}|$ أو جد مقدار المتجه $\overrightarrow{AB}$

الحل :-

$$\begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1 \\ (-3, & 6, & 1) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x_2 & y_2 & z_2 \\ (4, & 5, & -2) \end{array}$$

a) $\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1 \rangle$

$\overrightarrow{AB} = \langle 4+3, 5-6, -2-1 \rangle = \langle 7, -1, -3 \rangle$

b) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^3} = \sqrt{49+1+9} = \sqrt{59}$

التحقق من فهمك صـ114

اذا كان $A(-1,5,3)$ و $B(-5,3,-2)$ اكتب المتجه $\overrightarrow{AB}$ بالصورة الاحداثية ثم جد مقداره

الحل :-

$$\begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1 \\ (-1, & 5, & 3) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x_2 & y_2 & z_3 \\ (-5, & 3, & -2) \end{array}$$

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1 \rangle$

$\overrightarrow{AB} = \langle -5+1, 3-5, -2-3 \rangle = \langle -4, -2, -5 \rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+4+25} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$

تدريب :-

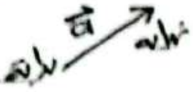
اذا كان $\vec{U} = \langle -4, m, -5 \rangle$ وكان $|\vec{U}| = 3\sqrt{5}$

جد قيمة الثابت m

± 2

راقت صباح

ثانياً: جمع وطرح المتجهات وضربها في عدد حقيقي هندسياً

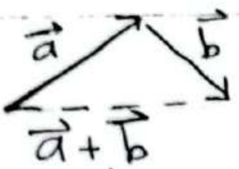


تذكير

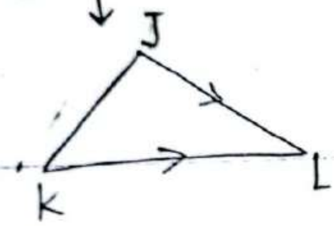
1) لجمع المتجه $\vec{a}$ والمتجه $\vec{b}$ هندسياً باستعمال قاعدة المثلث فإننا نرسم المتجه $\vec{a}$ ثم ارسم المتجه $\vec{b}$ بحيث تكون نقطة بدايته هي نقطة نهاية المتجه $\vec{a}$ ثم صل بين نقطة بداية $\vec{a}$ ونقطة نهاية $\vec{b}$ كما في الشكل المجاور فينتج $\vec{a}+\vec{b}$

ولإيجاد $\vec{a}-\vec{b}$ اجمع $\vec{a}$ مع معكوس المتجه $\vec{b}$

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$



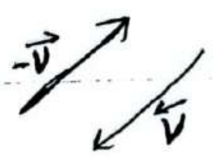
توضيح



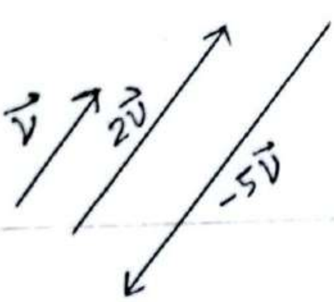
$$JK = \underbrace{JL}_{\text{بداية}} + \underbrace{LK}_{\text{نهاية}}$$

باختصار

2) معكوس المتجه $\vec{v}$ هو متجه له نفس المقدار للمتجه $\vec{v}$ لكنه يكون في اتجاه معاكس له ويرمز له بالرمز $-\vec{v}$



3) يمكن تمثيل ضرب المتجه $\vec{v}$ في العدد الحقيقي k برسم متجه موازٍ $\vec{v}$ وطوله $|k|$ مرة طول $\vec{v}$ وله الاتجاه نفسه إذا كان $k>0$ وله عكس اتجاه v إذا كان $k<0$

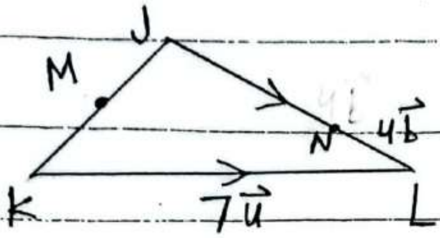


رأفت صبحي

مثال: في المثلث JKL المجاور، اذا كانت M نقطة منتصف $\overline{JK}$ وكانت $JN:NL=3:2$ وكان $\vec{KL}=7\vec{u}$

وكان $\vec{NL}=4\vec{b}$ اكتب $\vec{JM}$

بدلالة $\vec{u}$ و $\vec{b}$



الحل:

$\vec{JM}=\frac{1}{2}\vec{JK}$ ((معطى)) وعليه نحاول نتوصل الى $\vec{JK}$

قاعدة المثلث $\vec{JK}=\vec{JL}+\vec{LK}$

نكتب كل من $\vec{JL}$ ، $\vec{LK}$ بدلالة $\vec{b}$ و $\vec{u}$

$\vec{LK}=-\vec{KL}=-7\vec{u}$ ((معكوس المتجه))

من المعطيات $\frac{\vec{JN}}{\vec{NL}}=\frac{3}{2}$

$\vec{JN}=\frac{3}{2}\vec{NL}=\frac{3}{2}4\vec{b}=6\vec{b}$

$\vec{JL}=\vec{JN}+\vec{NL}$

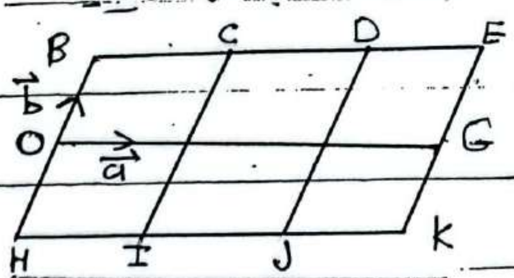
$=6\vec{b}+4\vec{b}=10\vec{b}$

وعليه $\vec{JK}=10\vec{b}-7\vec{u}$

$\vec{JM}=\frac{1}{2}(10\vec{b}-7\vec{u})$

تدريب: الشكل المجاور يمثل متوازيات اضلاع متطابقة، اكتب كل مما يلي

بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$



1) $\vec{OK}$ $-\vec{b}+3\vec{b}$

2) $\vec{CO}$ $-\vec{a}-\vec{b}$

3) $\vec{DI}$ $-2\vec{b}-\vec{a}$

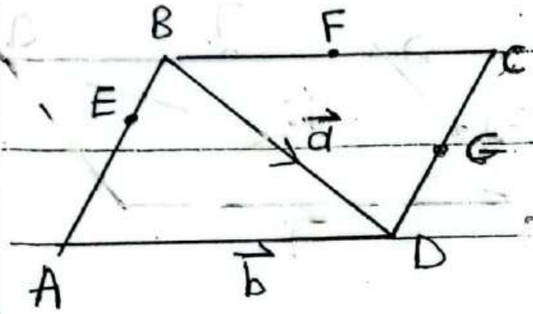
راقت ضاحي

التحقق من فهمي ص 116

في متوازي الأضلاع ABCD المجاور، إذا كانت F نقطة منتصف $\overline{BC}$ و G نقطة منتصف $\overline{DC}$ وكانت $\overrightarrow{BD}=\vec{a}$ ، وكانت $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ وكانت $AE=3EB$

اكتب كلاً مما يأتي بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{EB}$ c) $\overrightarrow{EF}$



الحل :-

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$

$=\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{BD}$

b) $AB=AE+EB$

$AB=3EB+EB=4EB$

وعليه

$\overrightarrow{EB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{4}(\vec{b}-\vec{a})$

c) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}$ قاعدة المثلث

في متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متساويان ومتوازيان

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{b}$

$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (لأن F منتصف BC)

$=\frac{1}{2}\vec{b}$

وعليه :-

$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{4}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{1}{2}\vec{b}$

$=\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$=\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a}$

راقت ضباعين

ثالثاً : جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي جبرياً

اذا كان $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ و $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$

متجهين في الفضاء وكان c عدداً حقيقياً فان :-

$\vec{v} + \vec{w} = \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3 \rangle$

$\vec{v} - \vec{w} = \langle v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3 \rangle$

$c\vec{v} = \langle cv_1, cv_2, cv_3 \rangle$

مثال :- اذا كان $\vec{a} = \langle 4, 7, -3 \rangle$ ، $\vec{b} = \langle 9, -2, -5 \rangle$ جد

1) $2\vec{a} + 3\vec{b}$ 2) $4\vec{a} - 2\vec{b}$

الحل :-

$2\vec{a} + 3\vec{b} = 2\langle 4, 7, -3 \rangle + 3\langle 9, -2, -5 \rangle$

$= \langle 8, 14, -6 \rangle + \langle 27, -6, -15 \rangle = \langle 35, 8, -21 \rangle$

$4\vec{a} - 2\vec{b} = 4\langle 4, 7, -3 \rangle - 2\langle 9, -2, -5 \rangle$

$= \langle 16, 28, -12 \rangle - \langle 18, -4, -10 \rangle$

$= \langle -2, 32, -2 \rangle$

تدريب

1) $A(3, 6, -1)$ ، $B(-1, 0, 5)$ جد $-2\overrightarrow{AB}$ $\langle 8, -12, 12 \rangle$

2) $\vec{a} = \langle 2, -4, 6 \rangle$ جد $\left|\frac{1}{2}\vec{a}\right|$ $\sqrt{14}$

3) $\vec{a} = \langle 1, -3, 6 \rangle$ ، $\vec{b} = \langle 2, 3, -2 \rangle$ جد $2\vec{a} - \vec{b}$

راقت صباحي

التحقق من فهمي ص 117

اذا كان $\vec{u}=\langle 4,5,-3\rangle$ و $\vec{v}=\langle 3,0,-5\rangle$ و $\vec{w}=\langle 9,-2,-5\rangle$

جد كلاً مما يأتي :

a) $3\vec{v}-4\vec{u}$ b) $3\vec{u}+5\vec{v}-2\vec{w}$

الحل :

a) $3\vec{v}-4\vec{u}=3\langle 3,0,-5\rangle-4\langle 4,5,-3\rangle$

$=\langle 9,0,-15\rangle-\langle 16,20,-12\rangle$

$=\langle -7,-20,-3\rangle$

b) $3\vec{u}+5\vec{v}-2\vec{w}=3\langle 4,5,-3\rangle+5\langle 3,0,-5\rangle-2\langle 9,-2,-5\rangle$

$=\langle 12,15,-9\rangle+\langle 15,0,-25\rangle-\langle 18,-4,-10\rangle$

$=\langle 9,19,-24\rangle$

رافت صافي

رابعاً : تساوي المتجهات

اذا كان $\vec{w}=\langle w_1, w_2, w_3\rangle$ و $\vec{v}=\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ فان

$\vec{v}=\vec{w}$ اذا وفقط اذا كان $v_1=w_1, v_2=w_2, v_3=w_3$

مثال :- اذا كان $\vec{v}=\langle 4-b, 10, c\rangle$ ، $\vec{u}=\langle 2, 3a-2, 9\rangle$

وكان $\vec{v}=\vec{u}$ جد قيمة كل من a و b و c

الحل :

تساوي الاحداثيات المتناظرة

$4-b=2 \rightarrow \boxed{b=2}$

$3a-2=10 \rightarrow 3a=12 \rightarrow \boxed{a=4}$

$\boxed{c=9}$

التحقق من فهمي ص 117

اذا كان $\vec{v}=\langle 3g+8, 0, 3r\rangle$ و $\vec{u}=\langle 20, 2p-5, -12\rangle$ وكان $\vec{u}=\vec{v}$

جد قيمة كل من p و q و r

الحل :

تساوي الاحداثيات المتناظرة

$3g+8=20 \rightarrow 3g=12 \rightarrow g=4$

$2p-5=0 \rightarrow 2p=5 \rightarrow p=\frac{5}{2}$

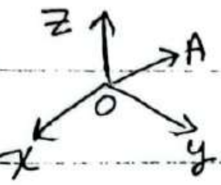
$3r=-12 \rightarrow r=-4$

رافت ضاحي

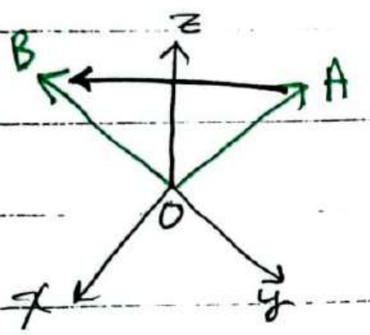
خامساً :- متجها الموقع والإزاحة

* يطلق على المتجه الذي يبدأ بنقطة الأصل وينتهي بالنقطة $A(x_1, y_1, z_1)$ اسم **متجه الموقع** للنقطة A ويستعمل الرمز $\overrightarrow{OA}$ للدلالة على متجه الموقع للنقطة A والصورة الاحداثية لهذا المتجه هي

$$\overrightarrow{OA} = \langle x_1, y_1, z_1\rangle - \langle 0, 0, 0\rangle = \langle x_1, y_1, z_1\rangle$$



في الشكل المجاور، يظهر باللون الأخضر متجها الموقع للنقطة A والنقطة B وهما $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ ويظهر باللون الأسود المتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي يمثل متجه الإزاحة من النقطة A الى النقطة B



حيث $\overrightarrow{AB}$ هو ناتج طرح الموقع A من متجه الموقع للنقطة B وفق قاعدة المثلث لجمع المتجهات

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

توضيح

$$AB = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

ويمثل مقدار متجه الإزاحة $\overrightarrow{AB}$ المسافة بين النقطة A والنقطة B وهذه المسافة هي قيمة عددية غير متجهة

حيث المسافة بين A و B هي $|\overrightarrow{AB}|$

رافت ضاحي

مثال : اذا كان $B(3,-5,7)$ و $A(-11,2,21)$ جد كلاً مما يأتي

1) متجه موقع كل من النقطة A والنقطة B

2) متجه الإزاحة من النقطة A الى النقطة B

3) المسافة بين النقطة A والنقطة B

الحل :

1) $\overrightarrow{OA} = \langle -11, 2, 21 \rangle$, $\overrightarrow{OB} = \langle 3, -5, 7 \rangle$

2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \langle 3, -5, 7 \rangle - \langle -11, 2, 21 \rangle = \langle 14, -7, -14 \rangle$

3) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(14)^2 + (-7)^2 + (-14)^2} = \sqrt{441} = 21$

التحقق من فهمك ص 119

اذا كانت $A(-2,8,13)$ و $B(5,-7,-9)$ و $C(0,1,-14)$ نقاطاً في الفضاء، جد كلاً مما يأتي :

a) متجه موقع كل من النقاط A و B و C

b) متجه الإزاحة من النقطة B الى النقطة C

c) المسافة بين النقطة A والنقطة C

الحل :

a) $\overrightarrow{OA} = \langle -2, 8, 13 \rangle$, $\overrightarrow{OB} = \langle 5, -7, -9 \rangle$, $\overrightarrow{OC} = \langle 0, 1, -14 \rangle$

b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \langle -5, 8, -5 \rangle$ نسمية متجه الإزاحة

c) $AC = \sqrt{(0+2)^2 + (1-8)^2 + (-14-13)^2}$

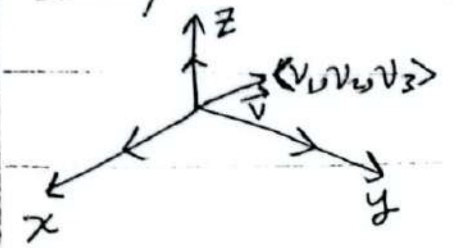
$= \sqrt{4 + 49 + 729}$

$= \sqrt{782}$

رافت صباحي

سادساً: متجهات الوحدة الأساسية $\hat{k}$ و $\hat{j}$ و $\hat{i}$

إذا كانت نقطة بداية المتجه $\vec{v}$ هي نقطة الأصل، ونقطة نهايته هي (v_1, v_2, v_3) كما في الشكل المجاور، فإنه يمكن التعبير عن ذلك بالصورة الإحداثية $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$



يطلق على المتجه الذي مقداره وحدة واحدة اسم **متجه الوحدة** وتعد متجهات الوحدة في الاتجاه الموجب للمحاور الإحداثية الثلاثة أهم متجهات الوحدة، وتسمى **متجهات الوحدة الأساسية**

يشار إلى كل من متجهات الوحدة الأساسية الثلاث برمز خاص إذ يرمز إلى متجه الوحدة في اتجاه محور x الموجب $\hat{i}$ وصورته الإحداثية $\hat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$

ويرمز إلى متجه الوحدة في اتجاه محور y الموجب بالرمز $\hat{j}$ وصورته الإحداثية هي $\hat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ ويرمز إلى متجه الوحدة في اتجاه محور z الموجب بالرمز $\hat{k}$ وصورته الإحداثية هي $\hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$

كيف نكتب المتجه $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية كما يأتي :-

$$\vec{v} = v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k}$$

ملاحظة
1) إذا كانت المتجهات بدلالة متجهات الوحدة الأساسية فإننا نجمع ونطرح بإجراء العمليات الحسابية العادية مع معاملة $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ معاملة المتغيرات

2) توجد صور مختلفة للتعبير عن المتجه $\vec{a}$ مثل
$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$ و $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

رافت ضايفي

مثال : 1) اكتب المتجه $\vec{u} = \langle 5, -3, 6 \rangle$

بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

2) اذا كان $\vec{u} = \hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ، $\vec{v} = 4\hat{i}+7\hat{k}$

اكتب المتجه $2\vec{u}+3\vec{v}$ بدلالة متجهات الوحدة

الحل :

1) $\vec{u} = 5\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}$

2) $2(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})+3(4\hat{i}+7\hat{k})$

$2\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}+12\hat{i}+21\hat{k}$

$14\hat{i}+4\hat{j}+15\hat{k}$

التحقق من فهمك صـ 121

اكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

a) $\vec{g} = \langle 9, 0, -4 \rangle$

b) $\overrightarrow{AB}$: $A(2,-1,4)$ ، $B(7,6,-2)$

c) $4\vec{m}-5\vec{f}$: $m = -2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ ، $\vec{f} = 3\hat{i}-5\hat{j}+6\hat{k}$

الحل :

a) $9\hat{i}-4\hat{k}$

b) $\overrightarrow{AB} = \langle 7-2, 6+1, -2-4 \rangle = \langle 5, 7, -6 \rangle = 5\hat{i}+7\hat{j}-6\hat{k}$

c) $4(-2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k})-5(3\hat{i}-5\hat{j}+6\hat{k})$

$-8\hat{i}+12\hat{j}-16\hat{k}-15\hat{i}+25\hat{j}-30\hat{k}$

$-23\hat{i}+37\hat{j}-46\hat{k}$

رأفت صبحي

سابعاً :- ايجاد متجه وحده في اتجاه اي متجه

نستطيع ايجاد صيغة متجه وحده في اتجاه أي متجه وذلك بقسمة ذلك المتجه على مقداره فيصبح مقدار المتجه الناتج وحدة واحدة

مثال :- اذا كان $A(3,4,-7)$، $B(-5,16,2)$ جد متجه وحده في اتجاه $\overrightarrow{AB}$

الحل :-

اكتب $\overrightarrow{AB}$ بالصورة الاحداثية

$\overrightarrow{AB} = \langle -5-3 , 16-4 , 2+7 \rangle = \langle -8 , 12 , 9 \rangle$

جد مقدار $\overrightarrow{AB}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64+144+81}$

$= \sqrt{289} = 17$

اضرب بـ $\frac{1}{17}$

$\hat{u} = \frac{1}{17} \langle -8 , 12 , 9 \rangle$

$\hat{u} = \langle \frac{-8}{17} , \frac{12}{17} , \frac{9}{17} \rangle$

رافت صباح

التحقق من فهمك ص 122

جد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي :-

a) $\vec{u} = \langle 4, -3, 5 \rangle$

b) $\vec{v} = 8\hat{i} + 15\hat{j} - 17\hat{k}$

c) $\overrightarrow{AB}$: $A(-1, 4, 6)$, $B(3, 3, 8)$

الحل :-

a) $|\vec{u}| = \sqrt{16+9+25} = \sqrt{50} = \sqrt{2 \times 25} = 5\sqrt{2}$

$\hat{u} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \langle 4, -3, 5 \rangle = \langle \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{-3}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$

b) $|\vec{v}| = \sqrt{64+225+289} = \sqrt{578} = 17\sqrt{2}$

$\hat{v} = \frac{1}{17\sqrt{2}} (8\hat{i} + 15\hat{j} - 17\hat{k}) = \frac{8}{17\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{15}{17\sqrt{2}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$

c) $\overrightarrow{AB} = \langle 3+1, 3-4, 8-6 \rangle = \langle 4, -1, 2 \rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$

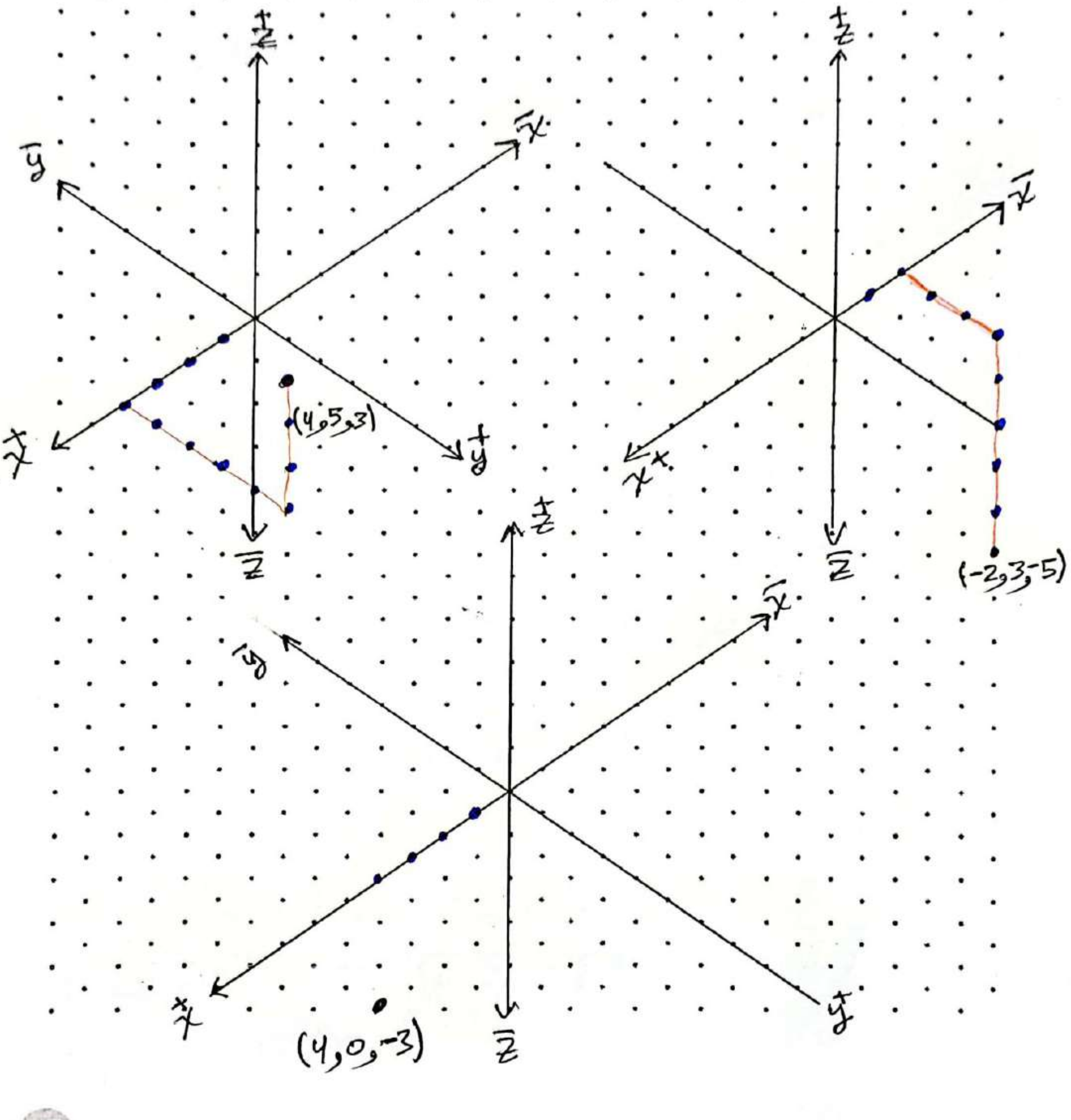
$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{21}} \langle 4, -1, 2 \rangle = \langle \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \rangle$

رائد صبحي

التدرب وحل المسائل

عين كلاً من النقاط الآتية في نظام الاحداثيات ثلاثي الابعاد

① $(4, 5, 3)$ ② $(-2, 3, -5)$ ③ $(4, 0, -3)$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

جد الطول واحداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي احداثيا طرفاها في كل مما يأتي :-

④ $(3, -2, 8)$ و $(5, 4, 2)$ ⑤ $(-2, 7, 0)$ و $(2, -5, 3)$

⑥ $(12, 8, -5)$ و $(-3, 6, 7)$ ⑦ $(-5, -8, 4)$ و $(3, 2, -6)$

---

4) $AB = \sqrt{(5-3)^2 + (4+2)^2 + (2-8)^2}$

$= \sqrt{4 + 36 + 36} = \sqrt{76} = \sqrt{4 \times 19} = 2\sqrt{19}$

$N = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (4, 1, 5)$

5) $AB = \sqrt{(2+2)^2 + (-5-7)^2 + (3-0)^2}$

$= \sqrt{16 + 144 + 9} = \sqrt{169} = 13$

$N = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{7-5}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(0, 1, \frac{3}{2}\right)$

6) $AB = \sqrt{(-3-12)^2 + (6-8)^2 + (7+5)^2}$

$= \sqrt{225 + 4 + 144} = \sqrt{373}$

$N = \left(\frac{12-3}{2}, \frac{8+6}{2}, \frac{-5+7}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, 7, 1\right)$

7) $AB = \sqrt{(3+5)^2 + (2+8)^2 + (-6-4)^2}$

$= \sqrt{64 + 100 + 100} = \sqrt{264} = \sqrt{4 \times 66} = 2\sqrt{66}$

$N = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{2-8}{2}, \frac{-6+4}{2}\right) = (-1, -3, -1)$

رأفت صافي

مثل كلاً من المتجهات الآتية بيانياً في الفضاء

8) $\vec{V} = \langle -3, -4, 5 \rangle$

9) $\vec{m} = \langle 2, -3, -4 \rangle$

10) $\vec{P} = \langle -3, 5, -2 \rangle$

11) $\vec{e} = -5\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

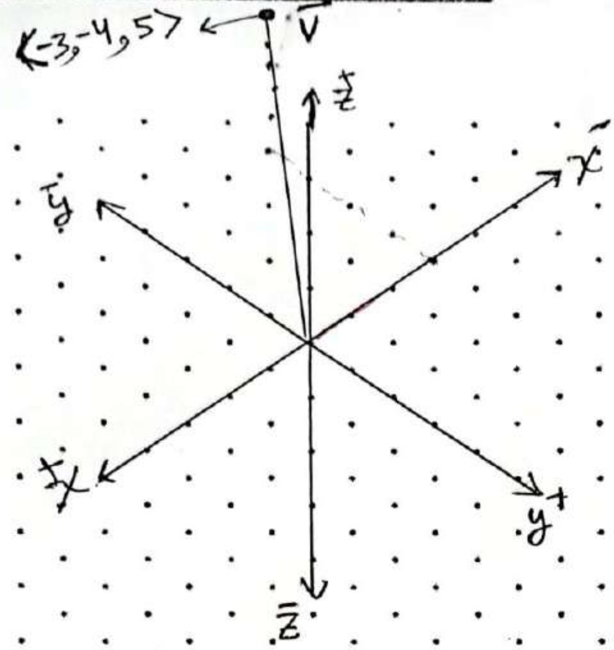
12) $\overrightarrow{AB} : A(4,1,1) , B(-3,6,3)$

13) $\overrightarrow{GH} : G(1,-3,5) , H(0,4,-2)$

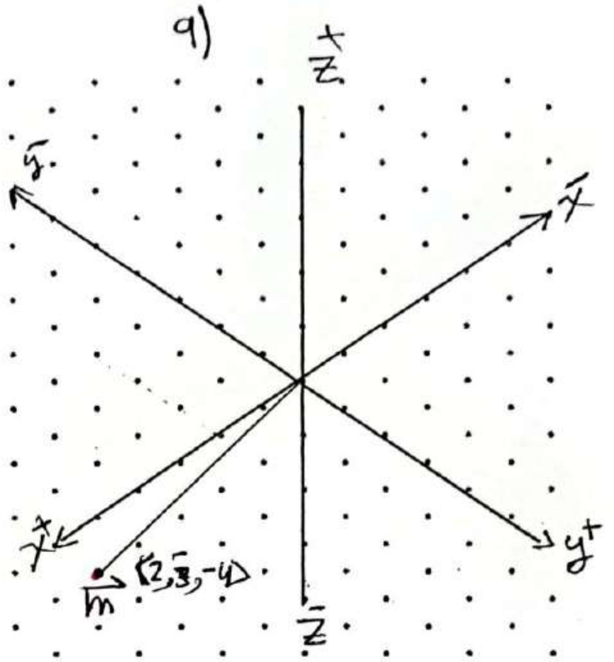
الحل :

راقت صباحي

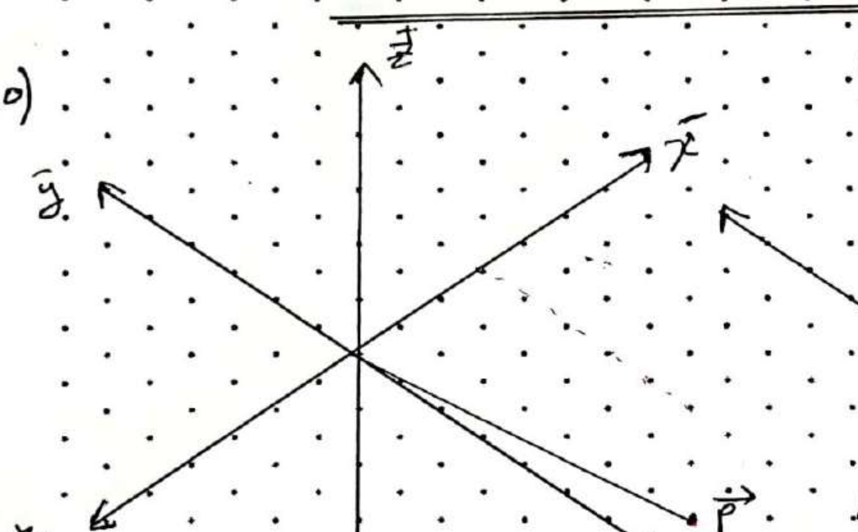
8)



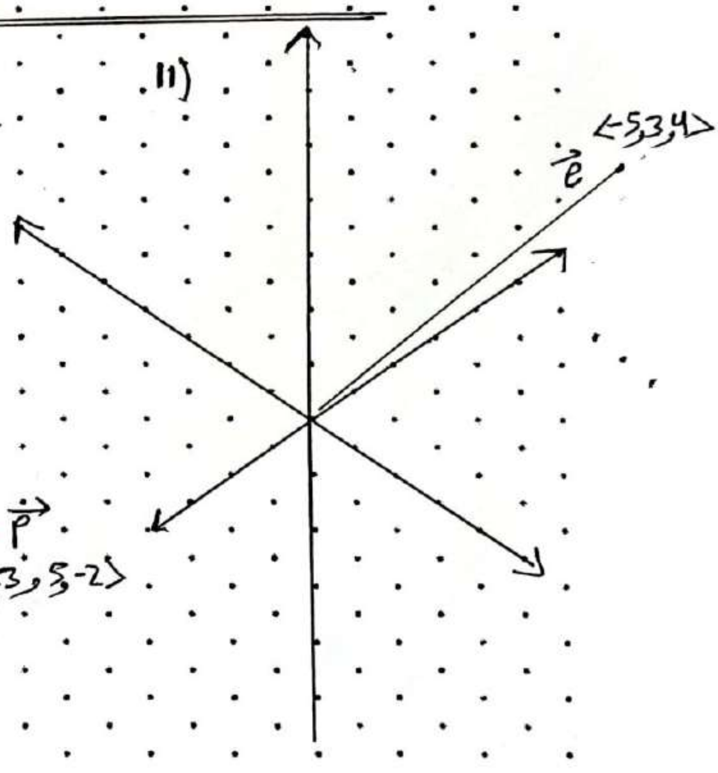
9)



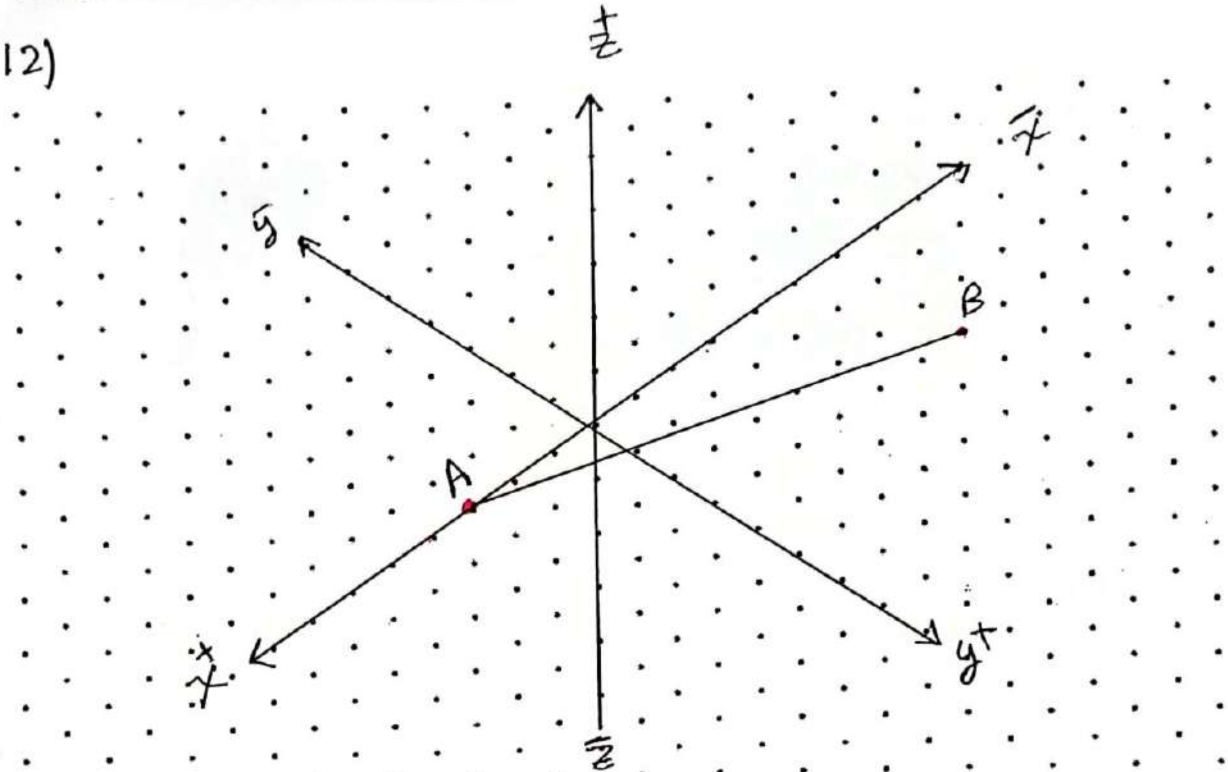
10)



11)

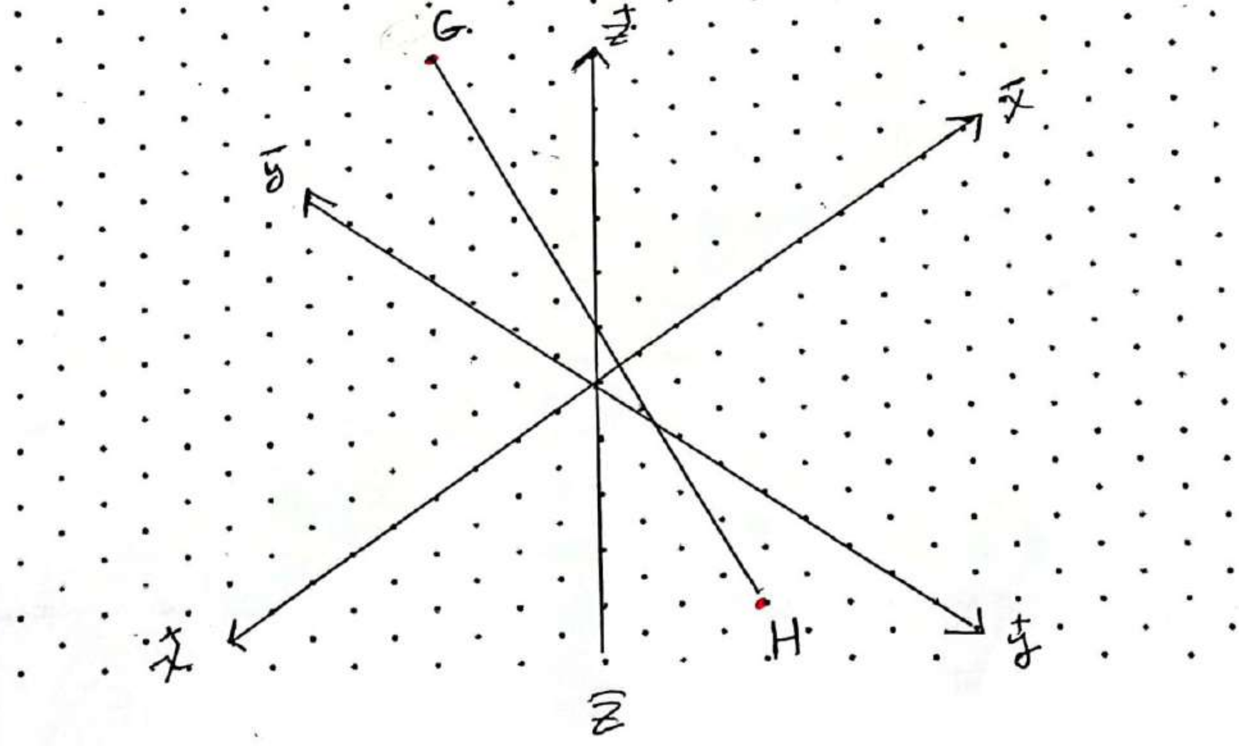


12)



$\overset{+}{z}$
$\bar{x}$
$\bar{y}$
B
A
$\overset{+}{x}$
y^{+}
$\bar{z}$

13)



G
$\overset{+}{z}$
$\bar{x}$
$\bar{y}$
$\overset{+}{x}$
H
$\overset{+}{y}$
$\bar{z}$

جد الصورة الاحداثية والمقدار للمتجه الذي اعطيت نقطة بدايته ونقطة نهايته في كل مما يأتي :-

14) $A(4,6,9)$, $B(-3,2,5)$

15) $A(-8,5,7)$, $B(6,3,2)$

16) $A(12,-5,4)$, $B(4,1,-1)$

17) $A(24,-8,10)$, $B(10,6,3)$

الحل :-

14) $\overrightarrow{AB} = \langle -3-4, 2-6, 5-9 \rangle = \langle -7, -4, -4 \rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{49+16+16} = \sqrt{81} = 9$

15) $\overrightarrow{AB} = \langle 6+8, 3-5, 2-7 \rangle = \langle 14, -2, -5 \rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{196+4+25} = \sqrt{225} = 15$

16) $\overrightarrow{AB} = \langle 4-12, 1+5, -1-4 \rangle = \langle -8, 6, -5 \rangle$

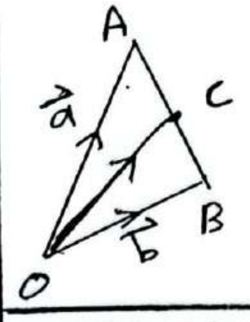
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{64+36+25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

17) $\overrightarrow{AB} = \langle 10-24, 6+8, 3-10 \rangle = \langle -14, 14, -7 \rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{196+196+49} = \sqrt{441} = 21$

---

18) اذا كان OAB مثلثاً فيه $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ والنقطة C هي منتصف $\overrightarrow{AB}$ فاكتب المتجه $\overrightarrow{OC}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$



الحل :- $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ ((قاعدة المثلث))

$= \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \vec{a} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})$

$= \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})$

$= \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

رافت صباغي

٠٧٨٥٦٢٤٣٦٤

اذا كان $\vec{e} = \langle -3, 9, -4 \rangle$ ، $\vec{f} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k}$ ، $\vec{g} = \langle -1, 8, -5 \rangle$ جد كلاً مما يأتي

19) $3\vec{e} + 4\vec{f}$

20) $\vec{e} + \vec{f} - 3\vec{g}$

21) $4\vec{e} - 2\vec{f} + 3\vec{g}$

22) $2\vec{e} + 7\vec{f} - 2\vec{g}$

الحل:

19) $3\vec{e} + 4\vec{f} = 3\langle -3, 9, -4 \rangle + 4\langle 5, -3, 7 \rangle$

$= \langle -9, 27, -12 \rangle + \langle 20, -12, 28 \rangle = \langle 11, 15, 16 \rangle$

20) $\vec{e} + \vec{f} - 3\vec{g} = \langle -3, 9, -4 \rangle + \langle 5, -3, 7 \rangle - 3\langle -1, 8, -5 \rangle$

$= \langle 2, 6, 3 \rangle - \langle -3, 24, -15 \rangle$

$= \langle 5, -18, 18 \rangle$

21) $4\vec{e} - 2\vec{f} + 3\vec{g} = 4\langle -3, 9, -4 \rangle - 2\langle 5, -3, 7 \rangle + 3\langle -1, 8, -5 \rangle$

$= \langle -12, 36, -16 \rangle - \langle 10, -6, 14 \rangle + \langle -3, 24, -15 \rangle$

$= \langle -25, 66, -45 \rangle$

22) $2\vec{e} + 7\vec{f} - 2\vec{g} = 2\langle -3, 9, -4 \rangle + 7\langle 5, -3, 7 \rangle - 2\langle -1, 8, -5 \rangle$

$= \langle -6, 18, -8 \rangle + \langle 35, -21, 49 \rangle - \langle -2, 16, -10 \rangle$

$= \langle 31, -19, 51 \rangle$

رافت صابوني

اذا كان $A(-1, 6, 5)$, $B(0, 1, -4)$ و $C(2, 1, 1)$ نقاطاً في الفضاء ، جد كلاً مما يأتي :

23) متجه موقع كل من النقاط A و B و C

24) متجه الازاحة من النقطة B الى النقطة A

25) متجه الازاحة من النقطة C الى النقطة B

26) المسافة بين النقطة C والنقطة B

الحل :

23) $\overrightarrow{OA} = \langle -1, 6, 5 \rangle$ و $\overrightarrow{OB} = \langle 0, 1, -4 \rangle$ و $\overrightarrow{OC} = \langle 2, 1, 1 \rangle$

24) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \langle -1, 6, 5 \rangle - \langle 0, 1, -4 \rangle = \langle -1, 5, 9 \rangle$

25) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \langle 0, 1, -4 \rangle - \langle 2, 1, 1 \rangle = \langle -2, 0, -5 \rangle$

26) $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{4 + 0 + 25} = \sqrt{29}$

اكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

27) $\vec{g} = \langle 5, 7, -1 \rangle$

28) $\overrightarrow{ST}$: $S(1, 0, -5)$ و $T(2, -2, 0)$

29) $-\vec{a} + 3\vec{b}$: $\vec{a} = 1\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ و $\vec{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

الحل :

27) $5\hat{i} + 7\hat{j} - \hat{k}$

28) $\overrightarrow{ST} = (2-1)\hat{i} + (-2-0)\hat{j} + (0+5)\hat{k} = \hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$

29) $-(1\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + 3(4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$

$-1\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} + 12\hat{i} - 9\hat{j} + 15\hat{k} = 11\hat{i} - 11\hat{j} + 19\hat{k}$

رافت صافي

جد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي

30) $-4\hat{i}+3\hat{j}$

31) $143\hat{i}-24\hat{j}$

32) $-72\hat{i}+33\hat{j}+56\hat{k}$

33) $\begin{pmatrix}11\\13\\8\end{pmatrix}$

34) $\begin{pmatrix}5\\-4\\-2\end{pmatrix}$

35) $\vec{n}=\langle -2,0,3\rangle$

الحل :- $\vec{V}=-4\hat{i}+3\hat{j}$

30) $|\vec{V}|=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$\hat{V}=\frac{1}{5}\vec{V}=\frac{1}{5}(-4\hat{i}+3\hat{j})=\frac{-4}{5}\hat{i}+\frac{3}{5}\hat{j}$

31) $|\vec{V}|=\sqrt{(143)^2+(-24)^2}=\sqrt{20449+576}=145$

$\hat{V}=\frac{1}{145}\vec{V}=\frac{1}{145}(143\hat{i}-24\hat{j})=\frac{143}{145}\hat{i}-\frac{24}{145}\hat{j}$

---

32) $|\vec{v}|=\sqrt{(-72)^2+(33)^2+(56)^2}=\sqrt{9409}=97$

$\hat{V}=\frac{1}{97}(-72\hat{i}+33\hat{j}+56\hat{k})=\frac{-72}{97}\hat{i}+\frac{33}{97}\hat{j}+\frac{56}{97}\hat{k}$

$\begin{pmatrix}11\\13\\8\end{pmatrix}=\langle 11,13,8\rangle$

33) $|\vec{V}|=\sqrt{(11)^2+(13)^2+(8)^2}=\sqrt{354}$

$\hat{V}=\frac{1}{\sqrt{354}}\begin{pmatrix}11\\13\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{\sqrt{354}}\\\frac{13}{\sqrt{354}}\\\frac{8}{\sqrt{354}}\end{pmatrix}$

---

34) $|\vec{V}|=\sqrt{25+16+4}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

$\hat{V}=\frac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix}5\\-4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3\sqrt{5}}\\\frac{-4}{3\sqrt{5}}\\\frac{-2}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}$

رافت صبايخي

٠٧٨٥٠٨٢٤٤٦٤

35) $|\vec{n}| = \sqrt{4+0+9} = \sqrt{13}$

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{13}}\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 0, 3\rangle = \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, 0, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$$

---

36) اذا كان $\vec{a} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}$ و $\vec{b} = 7\hat{i} + 39\hat{j} - 2\hat{k}$

وكان $3\vec{a} + c\vec{b} = -23\hat{i} - 66\hat{j} + 40\hat{k}$ جد قيمة c

الحل :-

$$3\vec{a} + c\vec{b} = 3(-3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}) + c(7\hat{i} + 39\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= -9\hat{i} + 12\hat{j} + 36\hat{k} + 7c\hat{i} + 39c\hat{j} - 2c\hat{k}$$

بالمقارنة : $= (-9+7c)\hat{i} + (12+39c)\hat{j} + (36-2c)\hat{k}$

$$-9 + 7c = -23$$

$$7c = -14 \rightarrow \boxed{c = -2}$$

---

37) اذا كان $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ v \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ w+47 \\ -4 \end{pmatrix}$ وكان $k\vec{s} - 4\vec{t} = \begin{pmatrix} 6 \\ 31 \\ w \end{pmatrix}$

جد قيمة كل من v و w و k

الحل :

$$k\vec{s} - 4\vec{t} = k\begin{pmatrix} 2 \\ w+47 \\ -4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 3 \\ v \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ kw+47k \\ -4k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 4v \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2k-12 \\ kw+47k-4v \\ -4k-8 \end{pmatrix}$$

بالمقارنة

$2k - 12 = 6 \rightarrow \boxed{k = 9}$ ، $-4k - 8 = w$

$-36 - 8 = w \rightarrow \boxed{w = -44}$

وايضاً $kw + 47k - 4v = 31$

نعوض $-396 + 423 - 4v = 31$

$$27 - 4v = 31$$

$$4v = -4$$

راقت صباح

$$\boxed{v = -1}$$

38) إذا كان $\vec{n}=\langle 6,2,-3\rangle$ و $\vec{p}=\langle 2,a,-1\rangle$ ، $5\vec{m}+2\vec{p}=4\vec{n}$

$\vec{m}=\langle 4,1,-2\rangle$ فما قيمة الثابت a

الحل:

$$5\vec{m}+2\vec{p}=5\langle 4,1,-2\rangle+2\langle 2,a,-1\rangle$$
$$=\langle 20,5,-10\rangle+\langle 4,2a,-2\rangle$$
$$=\langle 24,5+2a,-12\rangle$$

بالمقارنة

$$4\vec{n}=4\langle 6,2,-3\rangle=\langle 24,8,-12\rangle$$

$$5+2a=8\rightarrow 2a=3\rightarrow \boxed{a=\frac{3}{2}}$$

---

39) إذا كان $\vec{v}=\langle u-3,u+1,u-2\rangle$ وكان $|\vec{v}|=17$ جد u

$$|\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}=\sqrt{(u-3)^2+(u+1)^2+(u-2)^2}$$

نربع

$$17=\sqrt{u^2-6u+9+u^2+2u+1+u^2-4u+4}$$

نرتب

$$289=3u^2-8u+14$$

القانون العام

$$3u^2-8u-275=0$$

$$u=\frac{8\pm\sqrt{64-4(3)(-275)}}{6}=\frac{8\pm 58}{6}=-\frac{25}{3}\ ,\ 11$$

رافت صافي

٤٥) اذا كان متجها الموقع للنقطة G والنقطة H هما

$\vec{g} = \langle -2, c+1, -8 \rangle$ ، و $\vec{h} = \langle c-1, -4, c+2 \rangle$

على الترتيب جد قيمة c علماً بأن $|\vec{GH}| = 19$ وأن $c>0$

الحل :

$\vec{GH} = \vec{OH} - \vec{OG}$

$\vec{GH} = \langle c-1+2, -4-c-1, c+2+8 \rangle$

$= \langle c+1, -5-c, c+10 \rangle$

$|\vec{GH}| = \sqrt{(c+1)^2 + (-5-c)^2 + (c+10)^2}$

نربع $19 = \sqrt{c^2+2c+1+25+10c+c^2+c^2+20c+100}$

نرتب $361 = 3c^2+32c+126$

القانون العام $3c^2+32c-235=0$

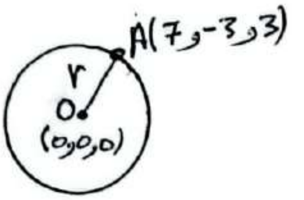
$c = \dfrac{-32 \pm \sqrt{1024+2820}}{6} = \dfrac{-32 \pm 62}{6} = 5, \dfrac{-47}{3}$

لكن $c>0$ وعليه $c=5$

رأفت صالحي

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

(41) اكتشف الخطأ: قالت حنان: إذا كانت النقطة $A(7, -3, 3)$ تقع على كرة مركزها نقطة الأصل، فإن النقطة $B(2, -8, -1)$ تقع خارج الكرة. في حين قالت هديل: النقطة B تقع داخل هذه الكرة، أي القولين صحيح



الحل: $r = OA = \sqrt{(7)^2+(-3)^2+(3)^2}$

$= \sqrt{49+9+9} = \sqrt{67}$

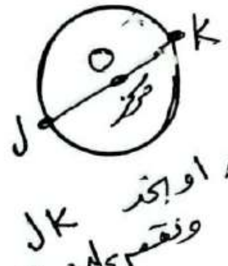
$OB = \sqrt{(2)^2+(-8)^2+(-1)^2}$

$OB = \sqrt{4+64+1} = \sqrt{69}$

نلاحظ أن $OB > OA$ وعليه النقطة B تقع خارج الكرة.

---

(42) إذا وقعت النقطة $J(-4, 6, -1)$ والنقطة $K(-2, 2, 17)$ على طرفي أحد أقطار كرة، بيّن أن النقطة $L(2, 10, 3)$ والنقطة $J(4, -2, 7)$ تقعان على سطح تلك الكرة.



الحل: مركز الكرة $O = \left(\frac{-2-4}{2}, \frac{2+6}{2}, \frac{17-1}{2}\right)$

$O = (-3, 4, 8)$

نصف القطر $OK = \sqrt{(-3+2)^2+(4-2)^2+(8-17)^2} = \sqrt{86}$

أو نجد JK ونقسم على 2

نجد كل من OL و OJ ونقارنها بطول نصف القطر

$OL = \sqrt{(2+3)^2+(10-4)^2+(3-8)^2} = \sqrt{25+36+25} = \sqrt{86}$

$OJ = \sqrt{(4+3)^2+(-2-4)^2+(7-8)^2} = \sqrt{49+36+1} = \sqrt{86}$

وعليه تقعان على سطح الكرة لأن بعدهم عن المركز يساوي نصف القطر

رافت صمادي
٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

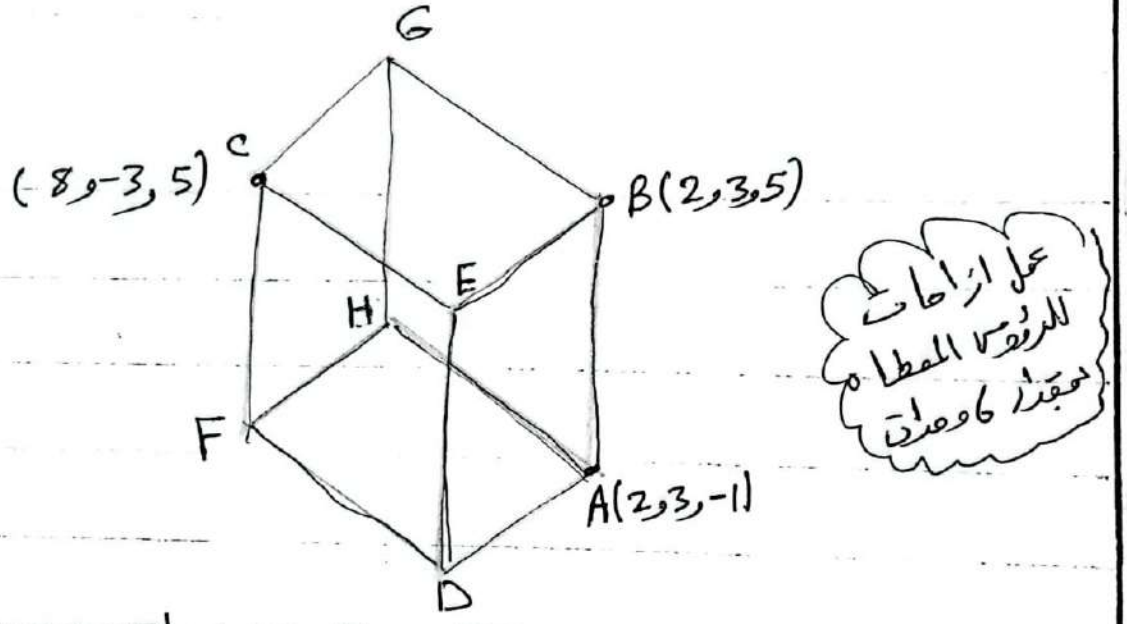
43) تمثل النقاط $B(2,3,5)$ و $C(8,-3,5)$ و $A(2,3,-1)$ ثلاثة من رؤوس مكعب خشبي، كل وجهين من أوجهه يوازيان أحد المستويات: yz و xz و xy

اكتب احداثيات الرؤوس الخمسة الأخرى.

الحل :-

لاحظ B و A تختلف في الاحداثي z والفرق بينهما 6

وعليه طول ضلع المكعب 6 وعليه AB أحد أحرف المكعب



$F(8,-3,-1)$: ازاحة C باتجاه $\bar{z}$ 6 وحدات

$D(8,3,-1)$: ازاحة A باتجاه $\overset{+}{x}$ 6 وحدات

$E(8,3,5)$: ازاحة B باتجاه $\overset{+}{x}$ 6 وحدات

$G(2,-3,5)$: ازاحة B باتجاه $\bar{y}$ 6 وحدات

$H(2,-3,-1)$: ازاحة A باتجاه $\bar{y}$ 6 وحدات

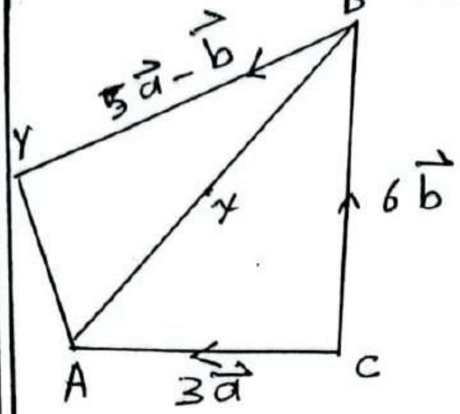
رأفت صمادي

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

44) في الشكل الآتي : اذا كان :

$\overrightarrow{CB}=6\vec{b}$ ، $\overrightarrow{BY}=5\vec{a}-\vec{b}$ ، $\overrightarrow{CA}=3\vec{a}$

وكانت X تقع على $\overline{AB}$ حيث $AX:XB=1:2$. أثبت ان $\overrightarrow{CX}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CY}$



الحل :

من التناسب $\frac{AX}{XB}=\frac{1}{2}$

لحساب $\overrightarrow{CX}$ نحتاج معرفة $\overrightarrow{AX}$

$XB=2AX$

$AB=AX+XB$

$AB=AX+2AX$

$AB=3AX \longrightarrow AX=\frac{1}{3}AB$

قاعدة المثلث

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AB}=-3\vec{a}+6\vec{b}$

$\overrightarrow{AX}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(-3\vec{a}+6\vec{b})=-\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AX}$

$\overrightarrow{CX}=3\vec{a}-\vec{a}+2\vec{b}=2\vec{a}+2\vec{b}=2(\vec{a}+\vec{b})$ —— (1)

لحساب $\overrightarrow{CY}$ نحتاج $\overrightarrow{AY}$

$\overrightarrow{AY}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BY}=-3\vec{a}+6\vec{b}+5\vec{a}-\vec{b}$

$=2\vec{a}+5\vec{b}$

$\overrightarrow{CY}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AY}=3\vec{a}+2\vec{a}+5\vec{b}=5\vec{a}+5\vec{b}=5(\vec{a}+\vec{b}) \rightarrow$ (2)

من معادلة (1) فان $\vec{a}+\vec{b}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CX}$ وكذلك من معادلة (2) فان $\vec{a}+\vec{b}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CY}$

وعليه $\frac{1}{2}\overrightarrow{CX}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CY} \longrightarrow \overrightarrow{CX}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CY}$

رافت صباغي

٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

اذا كانت متجهات الموقع للنقاط N و L و M هي :

$\vec{m} = -3\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}$ ، $\vec{L} = 4\hat{i}-10\hat{j}+3\hat{k}$ و $\vec{n} = 5\hat{i}+3\hat{j}-9\hat{k}$

اجب عن السؤالين الآتيين :

(45) أثبت ان المثلث LMN قائم الزاوية

(46) جد مساحة المثلث LMN

الحل :

نستخدم عكس نظرية فيثاغورس

$M(-3, -6, 1)$ ، $L(4, -10, 3)$ ، $N(5, 3, -9)$

$\vec{MN} = \langle 5+3, 3+6, -9-1 \rangle = \langle 8, 9, -10 \rangle$

$|\vec{MN}| = \sqrt{64+81+100} = \sqrt{245}$

$\vec{ML} = \langle 4+3, -10+6, 3-1 \rangle = \langle 7, -4, 2 \rangle \rightarrow |\vec{ML}| = \sqrt{49+16+4} = \sqrt{69}$

$\vec{NL} = \langle 4-5, -10-3, 3+9 \rangle = \langle -1, -13, 12 \rangle \rightarrow |\vec{NL}| = \sqrt{1+169+144} = \sqrt{314}$

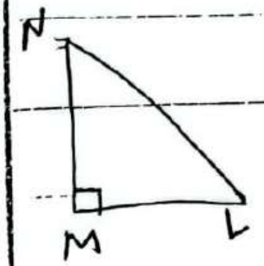
الوتر

$|NL|^2 = |ML|^2 + |MN|^2$

$314 = 69 + 245$

$314 = 314$

حسب عكس نظرية فيثاغورس فان المثلث قائم الزاوية في M



مساحة المثلث $A = \frac{1}{2}(ML)(MN)$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{69}\sqrt{245}$ → 49×5

$= \frac{7}{2}\sqrt{345}$ وحدة مربعة

رأفت صابحي

كتاب التمارين

عين كلاً من النقاط الآتية في نظام الاحداثيات الثلاثي الابعاد

1) $A(0,2,-3)$ 2) $B(-1,0,4)$

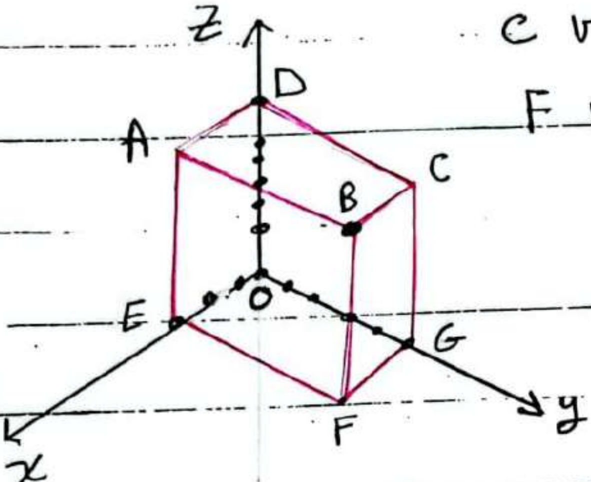
3) $C(2,4,3)$ 4) $D(-3,-2,-5)$

الحل: ورقة منقط

في الشكل المجاور متوازي مستطيلات 6 اذا كانت احداثيات الرأس B هي $(3,5,6)$ فاكتب احداثيات كل مما يأتي:

5) الرأس A 6) الرأس C

7) الرأس D 8) الرأس F



الحل:

5) يقع في المستوى xz وعليه y هي صفراً حيث تعود على المحورين z و x

$A(3,0,6)$

6) يقع في المستوى zy فيها x صفراً

$C(0,5,6)$

7) يقع على محور z فيها x و y صفراً $(0,0,6)$

8) يقع في المستوى xy فيها z صفراً $(3,5,0)$

9) جد مركز متوازي المستطيلات ABCDOEFG

الحل: نأخذ مثلاً منتصف $\overrightarrow{BO}$

$$\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+5}{2}, \frac{0+6}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)$$

رافت ضابي

اكتب الصورة الاحداثية لكل من المتجهات الآتية ثم جد مقدار كل منها

(10) $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(-2,5,0)$ و $B(4,9,-3)$

(11) $\overrightarrow{EF}$ حيث $E(3,4,6)$ و $F(6,8,-6)$

(12) $\overrightarrow{GH}$ حيث $H(10,7,8)$ و $G(-2,3,2)$

الحل:

10) $\overrightarrow{AB} = \langle 4+2, 9-5, -3-0 \rangle = \langle 6, 4, -3 \rangle \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36+16+9} = \sqrt{61}$

11) $\overrightarrow{EF} = \langle 6-3, 8-4, -6-6 \rangle = \langle 3, 4, -12 \rangle \rightarrow |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$

12) $HG = \langle -2-10, 3-7, 2-8 \rangle = \langle -12, -4, -6 \rangle \rightarrow |\overrightarrow{GH}| = \sqrt{144+16+36} = \sqrt{196} = 14$

جد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي:

13) $\overrightarrow{AC} = 8\hat{i} + 5\hat{j} - 3\sqrt{5}\,\hat{k}$

14) $\vec{v} = \langle -5, 4, 20 \rangle$

الحل:

13)
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{64+25+45} = \sqrt{134}$$
$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{134}}(8\hat{i} + 5\hat{j} - 3\sqrt{5}\,\hat{k}) = \frac{8}{\sqrt{134}}\hat{i} + \frac{5}{\sqrt{134}}\hat{j} - \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{134}}\hat{k}$$

14)
$$|\vec{v}| = \sqrt{25+16+400} = \sqrt{441} = 21$$
$$\hat{v} = \frac{1}{21}\langle -5, 4, 20 \rangle = \left\langle \frac{-5}{21}, \frac{4}{21}, \frac{20}{21} \right\rangle$$

م/ رأفت صافي

15) جد متجهاً له نفس اتجاه المتجه $\vec{v}=4\hat{i}-12\hat{j}+3\hat{k}$

ومقداره 52

الحل:

نجد اولاً $|\vec{v}|$

$$|\vec{v}|=\sqrt{16+144+9}=\sqrt{169}=13$$

نجد الثابت

$$|c\vec{v}|=c(13)=52 \rightarrow c=4$$

$$c\vec{v}=4(4\hat{i}-12\hat{j}+3\hat{k})=16\hat{i}-48\hat{j}+12\hat{k}$$

اذا كان $\vec{u}=3\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}$ و $\vec{v}=\langle -4,3,-6\rangle$

جد كلاً مما يأتي:

16) $2\vec{u}+4\vec{v}$ 17) $3\vec{u}-2\vec{v}$

الحل:

$\vec{u}=\langle 3,5,-7\rangle$

16) $2\vec{u}+4\vec{v}=2\langle 3,5,-7\rangle+4\langle -4,3,-6\rangle$

$=\langle 6,10,-14\rangle+\langle -16,12,-24\rangle$

$=\langle -10,22,-38\rangle$

17) $3\vec{u}-2\vec{v}=3\langle 3,5,-7\rangle-2\langle -4,3,-6\rangle$

$=\langle 9,15,-21\rangle-\langle -8,6,-12\rangle$

$=\langle 17,9,-9\rangle$

رأفت صابح

18) جد قيمة كل من الأعداد الحقيقية a و b و c التي تحقق

$$a\vec{u}+5\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

الحل :-

$a\vec{u}+5\vec{v}=a\langle 3,5,-7\rangle+5\langle -4,3,-6\rangle$

$=\langle 3a,5a,-7a\rangle+\langle -20,15,-30\rangle$

$=\langle 3a-20,\ 5a+15,\ -7a-30\rangle=\begin{pmatrix}-2\\ b\\ c\end{pmatrix}=\langle -2,b,c\rangle$

بالمقارنة

$3a-20=-2\rightarrow a=6$

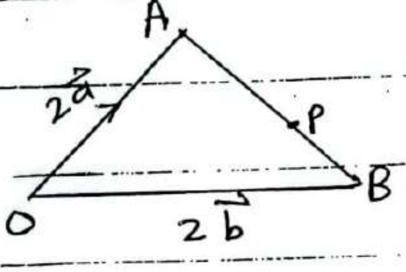
$b=5a+15=30+15=45$

$c=-7a-30=-42-30=-72$

19) في المثلث OAB المجاور، تقع النقطة P على الضلع AB

حيث $AP:PB=5:3$ اذا كان $\vec{OP}=k(3\vec{a}+5\vec{b})$

فما قيمة العدد الحقيقي k



الحل :-

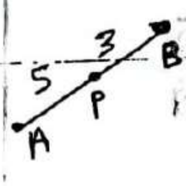
(قاعدة المثلث) $\vec{OP}=\vec{OB}+\vec{BP}$

$\vec{OP}=2\vec{b}+\vec{BP}$ —— (1)

نحتاج الى $\vec{BP}$ كتابتها بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

من المعطيات $AP:PB=5:3$

فإنه $\vec{BP}=\frac{3}{8}\vec{BA}$



نعود الى (1) :-

قاعدة المثلث $\vec{OP}=2\vec{b}+\frac{3}{8}(\vec{BA})$

$\vec{OP}=2\vec{b}+\frac{3}{8}(\vec{BO}+\vec{OA})$

$=2\vec{b}+\frac{3}{8}(-2\vec{b}+2\vec{a})=\frac{5}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{a}$

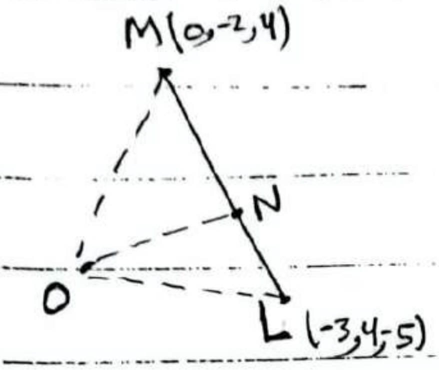
$\vec{OP}=\frac{1}{4}(5\vec{b}+3\vec{a})$

بالمقارنة $k=\frac{1}{4}$

رأفت صافي

20) متجها الموقع للنقطة L والنقطة M هما: $\langle -3,4,-5\rangle$ و $\langle 0,-2,4\rangle$ على الترتيب. جد متجه الموقع للنقطة N التي تقع على $\overline{LM}$ علماً بأن $\overrightarrow{LN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$

الحل:



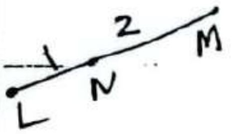
ليكن متجه الموقع للنقطة N هو $\overrightarrow{ON}$

$$\overrightarrow{LN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{LM}$$

متجه إزاحة

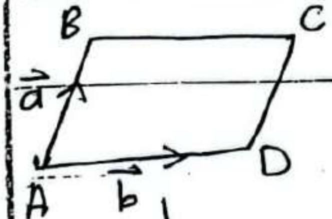
$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LN}$$
$$= \overrightarrow{OL} + \frac{1}{3}\overrightarrow{LM}$$
$$= \overrightarrow{OL} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL})$$
$$= \langle -3,4,-5\rangle + \frac{1}{3}\langle 3,-6,9\rangle$$
$$= \langle -3,4,-5\rangle + \langle 1,-2,3\rangle$$
$$= \langle -2,2,-2\rangle$$

$$\frac{LN}{NM} = \frac{1}{2}$$



21) ABCD متوازي أضلاع، حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ، $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ، $\overrightarrow{AC} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ ، $\overrightarrow{BD} = -6\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k}$ جد كلاً من $\vec{b}$ و $\vec{a}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

الحل:



كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان
$\overrightarrow{DC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$
$$2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k} = \vec{b} + \vec{a} \quad (1)$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$$
$$-6\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k} = -\vec{a} + \vec{b} \quad (2)$$

حل المعادلتان:

بالجمع: $2\vec{b} = -4\hat{i}+6\hat{k}+10\hat{j} \rightarrow \vec{b} = -2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k}$

بالطرح: $2\vec{a} = 8\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k} \rightarrow \vec{a} = 4\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

رأفت صافي

22) اذا كان $\vec{c}=\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$ و $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$ جد p, q, r

التي تحقق المعادلة $p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}=\begin{pmatrix}28\\-12\\-5\end{pmatrix}$

الحل:

$$p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}=\begin{pmatrix}p\\0\\4p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2q\\0\\-3q\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5r\\3r\\r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+2q-5r\\3r\\4p-3q+r\end{pmatrix}$$

بالمقارنة:

$3r=-12 \rightarrow r=-4$

$p+2q-5r=28 \rightarrow p+2q+20=28 \rightarrow p+2q=8$ — (1)

$4p-3q+r=-5 \rightarrow 4p-3q-4=-5 \rightarrow 4p-3q=-1$ — (2)

بحل المعادلتان $p=2$ و $q=3$

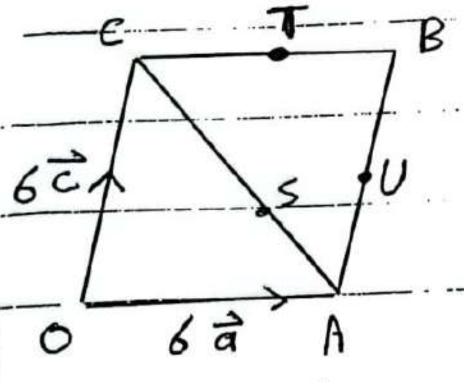
في الشكل المجاور OABC متوازي اضلاع فيه:

$\vec{OA}=6\vec{a}$ و $\vec{OC}=6\vec{c}$ والنقطة T هي منتصف الضلع BC

والنقطة U تقع على الضلع AB، حيث $AU:UB=2:1$ والنقطة S تقع

على القطر CA حيث $CS:SA=3:2$

احسب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{c}$



23) $\vec{OB}$ 24) $\vec{AC}$

25) $\vec{OU}$ 26) $\vec{UT}$

27) $\vec{TA}$ 28) $\vec{OS}$

29) $\vec{US}$ 30) $\vec{SB}$

رافت صاحي

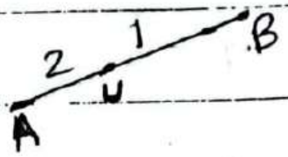
الحل :-

23) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ ((متوازي الاضلاع مضلعين)) $= 6\vec{a} + 6\vec{c}$

24) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -6\vec{a} + 6\vec{c}$

25)



$\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AU}$

$\overrightarrow{OU} = 6\vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OU} = 6\vec{a} + \frac{2}{3}6\vec{c}$

$\overrightarrow{OU} = 6\vec{a} + 4\vec{c}$

26) $\overrightarrow{UB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{UT} = \overrightarrow{UB} + \overrightarrow{BT}$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{3}(6\vec{c}) + \frac{1}{2}(-6\vec{a})$

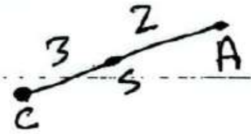
$= 2\vec{c} - 3\vec{a}$

27) $\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BA}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + -6\vec{c}$

$= \frac{1}{2}(6\vec{a}) - 6\vec{c} = 3\vec{a} - 6\vec{c}$

28)



$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS}$

$= 6\vec{c} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CA}$

$= 6\vec{c} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA})$

$= 6\vec{c} + \frac{3}{5}(-6\vec{c} + 6\vec{a})$

$= 6\vec{c} - \frac{18}{5}\vec{c} + \frac{18}{5}\vec{a} = \frac{12}{5}\vec{c} + \frac{18}{5}\vec{a}$

رأفت صابح

29) $\overrightarrow{US} = \overrightarrow{UA} + \overrightarrow{AS}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{2}{3}(-6\vec{c}) + \frac{2}{5}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC})$

$= -4\vec{c} + \frac{2}{5}(-6\vec{a} + 6\vec{c})$

$= -4\vec{c} - \frac{12}{5}\vec{a} + \frac{12}{5}\vec{c} = \frac{-8}{5}\vec{c} - \frac{12}{5}\vec{a}$

30) $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CB}$

$CB = OA$

ضلعان متوازيان في متوازي

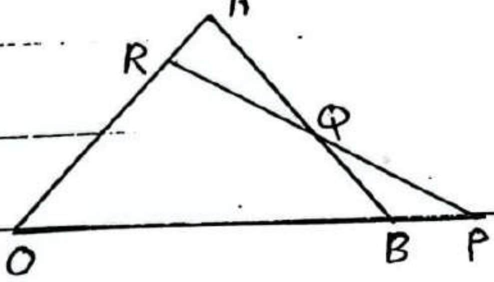
$= \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} + 6\vec{a}$

$= \frac{3}{5}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) + 6\vec{a}$

$= \frac{3}{5}(-6\vec{a} + 6\vec{c}) + 6\vec{a}$

$= \frac{-18}{5}\vec{a} + \frac{18}{5}\vec{c} + 6\vec{a} = \frac{12}{5}\vec{a} + \frac{18}{5}\vec{c}$

في الشكل المجاور، اذا كان متجها الموقع للنقطة A والنقطة B بالنسبة الى نقطة الأصل O هما: $\vec{a}$ و $\vec{b}$ على الترتيب. وكانت النقطة P تقع على امتداد $\overline{OB}$ حيث $\overrightarrow{OP} = \frac{5}{4}\overrightarrow{OB}$ والنقطة Q تقع على $\overline{AB}$ حيث $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ والنقطة R تقع على $\overline{OA}$ حيث $\overrightarrow{OR} = \lambda\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{QR} = \mu\overrightarrow{PR}$



اجب عن الاسئلة الآتية:

31) اكتب كلاً من $\overrightarrow{OQ}$ و $\overrightarrow{PQ}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

32) اكتب $\overrightarrow{QR}$ بدلالة λ و $\vec{a}$ و $\vec{b}$

33) اكتب $\overrightarrow{QR}$ بدلالة μ و λ و $\vec{a}$ و $\vec{b}$

34) جد قيمة كل من λ و μ

رأفت صابحي

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$
$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ}$ → $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)$

31) $= \vec{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$= \vec{a} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right)$

$= \vec{a} + \frac{1}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}$ → الفرع السابق

$= \frac{5}{4}\overrightarrow{BO} + \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

$= \frac{5}{4}(-\vec{b}) + \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{11}{12}\vec{b}$

32) $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR}$

نصل Q مع O حيث $\overrightarrow{QO}$
تم ايجادها من فرع (31)

$= -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \lambda\overrightarrow{OA}$

$= -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \lambda\vec{a} = \left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$

33) $\overrightarrow{QR} = \mu\,\overrightarrow{PR} = \mu\left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OR}\right)$

$= \mu\left(\frac{5}{4}\overrightarrow{BO} + \lambda\overrightarrow{OA}\right)$

$= \mu\left(-\frac{5}{4}\vec{b} + \lambda\vec{a}\right)$

من فرعين (32) و (33) وبمقارنة معاملات $\vec{a}$ ، $\vec{b}$

34) $-\frac{5}{4}\mu = -\frac{1}{3} \rightarrow \mu = \frac{4}{15}$

$\mu\lambda = \lambda - \frac{2}{3}$

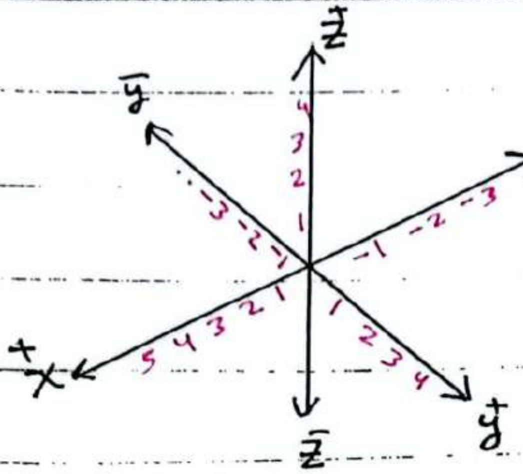
$\frac{4}{15}\lambda = \lambda - \frac{2}{3} \rightarrow \frac{4}{15}\lambda - \lambda = -\frac{2}{3}$

$\lambda = \frac{10}{11}$

رأفت صباحي

الدرس (1) | ملخص المتجهات

نظام الاحداثيات ثلاثي الابعاد



اضافة المحور Z الى المستوى الاحداثي لتحديد نقطة (x, y, z)

تحديد نقطة في نظام الاحداثيات ثلاثي الابعاد (a, b, c)

1) تعيين النقطة (a, b) في المستوى xy حيث يبدأ أولاً بتعيين x ثم نتحرك بموازاة y لتحديد b ثم نتوقف

2) نتحرك الى اعلى أو اسفل بموازاة المحور z حيث موجب c اعلى أما سالب الى اسفل وذلك حسب الاحداثي z

المسافة بين نقطتين واحداثيات نقطة المنتصف

اذا كان $B(x_2, y_2, z_2)$ و $A(x_1, y_1, z_1)$ فان :-

* المسافة بين النقطتين A و B :- $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

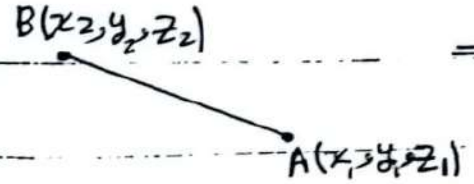
* احداثيات نقطة منتصف $\overline{AB}$:- $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

مرافق صافي

المتجه في الفضاء

المتجه AB هو سهم بدايته النقطة A ونهايته النقطة B

ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو الرمز $\vec{V}$



الصورة الاحداثية للمتجه في الفضاء

$$\vec{V} = \overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1 \rangle$$

$$\vec{V} = \langle V_1 , V_2 , V_3 \rangle$$

حيث

$$V_1 = x_2 - x_1$$
$$V_2 = y_2 - y_1$$
$$V_3 = z_2 - z_1$$

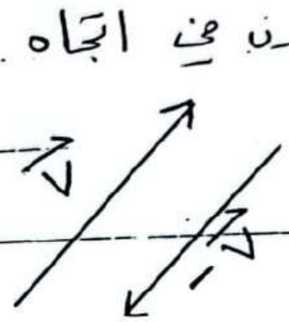
مقدار المتجه

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$$

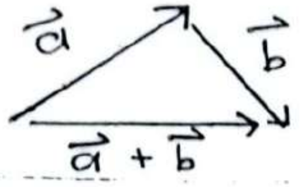
معكوس المتجه $\vec{V}$

هو متجه له نفس مقدار $\vec{V}$ لكنه يكون في اتجاه معاكس له ويرمز له بالرمز $-\vec{V}$



رأفت صافي

قاعدة المثلث لجمع المتجهات



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ ((بشكل عام))

حيث C الرأس الثالث في المثلث

ضرب متجه في عدد (K)

اذا كان K عدد حقيقي موجب فان $\vec{V}$ و $K\vec{V}$ لهما نفس الاتجاه

اما اذا كان K عدد حقيقي سالب فان $\vec{V}$ و $K\vec{V}$ لهما عكس الاتجاه

ملاحظة :

اذا طلب متجه له نفس اتجاه متجه آخر واعطى مقداره نتبع ما يلي :

1) نجد مقدار المتجه المعطى $|\vec{V}|$

2) مقدار المتجه المطلوب $= K(|\vec{V}|)$ ومنه نجد K

وعليه المتجه المطلوب $K\vec{V}$

جمع وطرح المتجهات وضربها بعدد حقيقي K

اذا كان $\vec{W} = \langle W_1, W_2, W_3 \rangle$ و $\vec{V} = \langle V_1, V_2, V_3 \rangle$ فان

1) $\vec{V} + \vec{W} = \langle (V_1 + W_1), (V_2 + W_2), (V_3 + W_3) \rangle$

2) $\vec{V} - \vec{W} = \langle (V_1 - W_1), (V_2 - W_2), (V_3 - W_3) \rangle$

3) $K\vec{V} = \langle KV_1, KV_2, KV_3 \rangle$

رأفت ضاحي

تساوي المتجهات

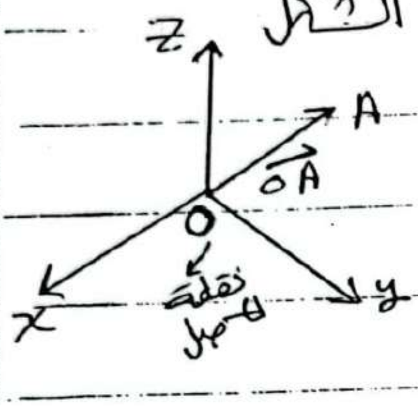
اذا كان $\vec{V}=\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ و $\vec{W}=\langle w_1, w_2, w_3\rangle$

فان $\vec{V}=\vec{W}$ اذا كان :-

$w_1=v_1$ و $w_2=v_2$ و $w_3=v_3$

متجه الموقع للنقطة A

هو المتجه الذي يبدأ من نقطة الاصل O وينتهي بالنقطة $A(x_1, y_1, z_1)$ ويرمز له $\vec{OA}$ كما في الشكل



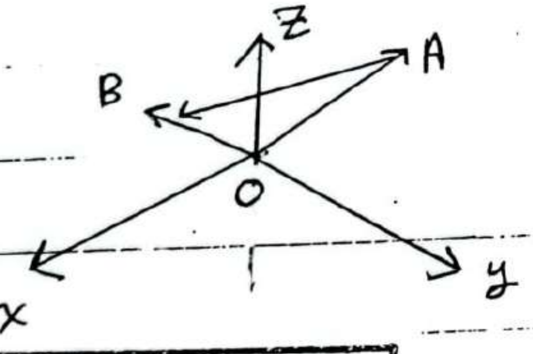
$$\vec{OA}=\langle x_1, y_1, z_1\rangle-\langle 0, 0, 0\rangle$$
$$=\langle x_1, y_1, z_1\rangle$$

متجه الازاحة من النقطة A إلى النقطة B

$\vec{AB}$: متجه الازاحة من النقطة A الى النقطة B

ويعبر عنه بالعلاقة

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$$



$|\vec{AB}|$:- مقدار متجه $\vec{AB}$

هو المسافة بين النقطة A

والنقطة B

رافت صافي

متجهات الوحدة الأساسية $\hat{k}$ و $\hat{j}$ و $\hat{i}$

يمكن كتابة أي متجه بدلالة متجهات الوحدة $\hat{k}$ و $\hat{j}$ و $\hat{i}$ كما يلي:

اذا كان $\vec{V} = \langle V_1, V_2, V_3 \rangle$ فان $\vec{V}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية يكتب على الصورة:

$$\vec{V} = V_1 \hat{i} + V_2 \hat{j} + V_3 \hat{k}$$

متجه الوحدة :- هو المتجه الذي مقداره وحدة واحدة

* عند جمع وطرح متجهات مكتوبة بدلالة متجهات الوحدة تعامل $\hat{k}$ و $\hat{j}$ و $\hat{i}$ معاملة المتغيرات حيث نجمع أو نطرح المعاملات

ايجاد متجه وحدة في اتجاه أي متجه :- $\hat{u}$

نستطيع ايجاد متجه وحدة في اتجاه أي متجه كما يلي:

1) نجد مقدار المتجه $|\vec{V}|$ و $|\vec{AB}|$

2) نضربه المتجه بالمقدار $\dfrac{1}{|\vec{AB}|}$

$$\hat{u} = \frac{1}{|\vec{AB}|} \langle V_1, V_2, V_3 \rangle$$ حسب ما هو مكتوب المتجه

اشكال الكتابة المتجه

$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

$\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

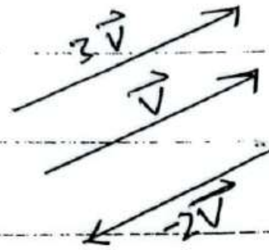
راقت ٠٠٠٠٥٦ صافي

الدرس (٢)

المستقيمات في الفضاء

توازي المتجهات

المتجهان المتوازيان هما متجهان لهما الاتجاه نفسه أو عكسه وليس شرطاً أن يكون لهما المقدار نفسه ، بمعنى يمكن كتابة كل منهما في صورة المتجه الآخر مضروباً في عدد حقيقي



إذا كان $\vec{V} = \langle V_1, V_2, V_3 \rangle$

$\vec{U} = \langle U_1, U_2, U_3 \rangle$

فإن $\vec{V} \parallel \vec{U}$ إذا وجد عدد حقيقي K حيث $K \neq 0$ بحيث

$$\langle V_1, V_2, V_3 \rangle = K \langle U_1, U_2, U_3 \rangle$$

مثال: إذا كان $B(1,-3,2)$ و $C(3,-14,8)$ و $D(-3,2,-2)$ و $A(-2,5,-3)$ حدد إذا كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا

① $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$

الحل: نكتب كلاً من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ بالصورة الإحداثية

$\overrightarrow{AB} = \langle 1+2, -3-5, 2+3 \rangle = \langle 3, -8, 5 \rangle$

$\overrightarrow{CD} = \langle -3-3, 2+14, -2-8 \rangle = \langle -6, 16, -10 \rangle$

نلاحظ أن $\langle -6, 16, -10 \rangle = -2 \langle 3, -8, 5 \rangle$

وعليه $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$

حيث هنا $K = -2$

② $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$

الحل:

$\overrightarrow{AC} = \langle 3+2, -14-5, 8+3 \rangle = \langle 5, -19, 11 \rangle$

$\overrightarrow{BD} = \langle -3-1, 2+3, -2-2 \rangle = \langle -4, 5, -4 \rangle$

لا يوجد عدد حقيقي اضرب به أحد المتجهين لينتج الآخر أي أن $\overrightarrow{AC} \neq k\,\overrightarrow{BD}$

وعليه غير متوازيان

ملاحظة: نستطيع معرفة التوازي من خلال القسمة فإن حدث تساوي يكون متوازيان

$\frac{U_1}{V_1}$, $\frac{U_2}{V_2}$, $\frac{U_3}{V_3}$

بشرط المقام ليس صفراً

راقت ضياء

التحقق من فهمك ص 127

اذا كان $L(7,7,3)$ و $K(4,5,3)$ و $H(4,4,-4)$ و $G(7,5,-11)$

حدد ان كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا.

a) $\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{KL}$ b) $\overrightarrow{GL}, \overrightarrow{HK}$

الحل :-

$\overrightarrow{GH} = \langle 4-7, 4-5, -4+11 \rangle = \langle -3, -1, 7 \rangle$

$\overrightarrow{KL} = \langle 7-4, 7-5, 3-3 \rangle = \langle 3, 2, 0 \rangle$

نلاحظ انه لا يوجد عدد حقيقي K حيث $\overrightarrow{GH} = K\,\overrightarrow{KL}$ وعليه غير متوازيان

b) $\overrightarrow{GL} = \langle 7-7, 7-5, 3+11 \rangle = \langle 0, 2, 14 \rangle$

$\overrightarrow{HK} = \langle 4-4, 5-4, 3+4 \rangle = \langle 0, 1, 7 \rangle$

$\langle 0, 2, 14 \rangle = 2\langle 0, 1, 7 \rangle$

وعليه $\overrightarrow{GL} \parallel \overrightarrow{HK}$

تدريب اذا كان $\vec{u} = \langle 3, a, 5 \rangle$ وكان $\vec{v} = \langle -6, 16, b \rangle$

وكان $\vec{u} \parallel \vec{v}$ جد قيمة الثابتين a و b

$a = -8$
$b = -10$

رافت ضاحي

اثبات توازي قطع مستقيمة

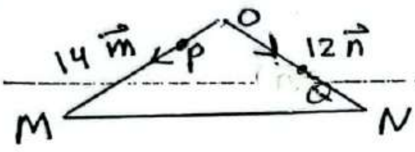
لاثبات توازي قطعتين مستقيمتين ، يكفي اثبات توازي متجهين يقعان عليهما بين القطعتين المستقيمتين

مثال: في المثلث OMN المجاور ، اذا كان $\overrightarrow{OM} = 14\vec{m}$ ، $\overrightarrow{ON} = 21\vec{n}$

وكانت النقطة P تقع على $\overline{OM}$ حيث $OP : PM = 2:5$ والنقطة Q تقع

على $\overline{ON}$ حيث $ON = \frac{7}{2} OQ$ أثبت ان

$\overline{PQ}$ يوازي $\overline{MN}$



الحل: نقوم باثبات ان $\overrightarrow{MN}$ ، $\overrightarrow{PQ}$ متوازيان حيث نكتب احدهما

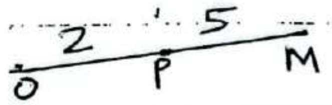
بدلالة الآخر مضروباً في عدد حقيقي

(نكتب كل منهما بدلالة $\vec{m}$ ، $\vec{n}$)

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}$$
$$= -14\vec{m} + 21\vec{n} \quad \text{—— (1)}$$

نكتب كلا من $\overrightarrow{PO}$ ، $\overrightarrow{OQ}$ بدلالة $\vec{m}$ ، $\vec{n}$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} \quad \text{—— (2)}$$



$$\overrightarrow{PO} = \frac{2}{7}\overrightarrow{MO} = \frac{2}{7}(-41m) = -4\vec{m}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{7}{2}\overrightarrow{OQ} \rightarrow \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{ON}$$
$$= \frac{2}{7}(21\vec{n}) = 6\vec{n}$$

نعود الى معادلة (2) :

$$\overrightarrow{PQ} = -4\vec{m} + 6\vec{n}$$

وعليه

$$\overrightarrow{MN} = 7(-2m + 3\vec{n})$$
$$\overrightarrow{PQ} = 2(-2m + 3\vec{n})$$

$$\overrightarrow{PQ} = (2)\left(\frac{\overrightarrow{MN}}{7}\right) = \frac{2}{7}\overrightarrow{MN}$$

طريقة اخرى لمعرفة K

$\frac{-4}{-14} = \frac{2}{7}$ / $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

وعليه $\overrightarrow{PQ}$ يساوي $\overrightarrow{MN}$ مضروباً في عدد ثابت

وعليه فان $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{MN}$ متوازيان

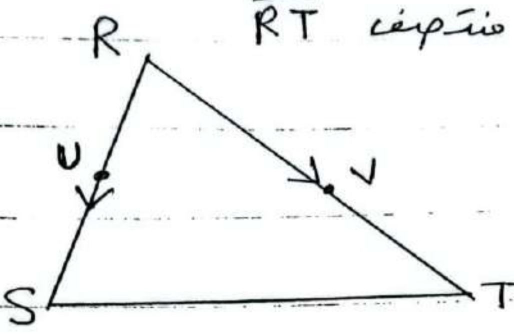
رافت صافي ٠٥٥٤٢

التحقق من فهمك ص 129

في المثلث RST المجاور، اذا كان $\overrightarrow{RS} = 4\vec{a}$, $\overrightarrow{RT} = 6\vec{b}$

والنقطة U منتصف $\overline{RS}$ والنقطة V منتصف $\overline{RT}$

أثبت ان $\overrightarrow{ST}$ يوازي $\overrightarrow{UV}$



الحل:

نكتب $\overrightarrow{ST}$ ، $\overrightarrow{UV}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

$$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT}$$

$$= -4\vec{a} + 6\vec{b} \quad \text{—— (1)}$$

$$\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{UR} + \overrightarrow{RV}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{SR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{RT}$$

$$= \frac{1}{2}(-4\vec{a}) + \frac{1}{2}(6\vec{b})$$

$$\overrightarrow{UV} = -2\vec{a} + 3\vec{b} \quad \text{—— (2)}$$

موقع K

$\frac{-4}{-2} = 2$, $\frac{6}{3} = 2$

من معادلة (1) $\overrightarrow{ST} = 2(-2\vec{a} + 3\vec{b})$

وعليه، $\overrightarrow{ST} = 2\overrightarrow{UV}$

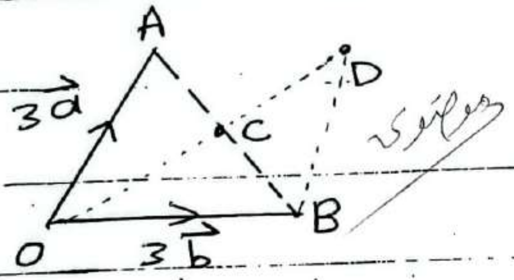
ومنه المتجهان $\overrightarrow{UV}$ و $\overrightarrow{ST}$ متوازيان

رافت صافي

اثبات ان ثلاث نقاط في الفضاء تقع على استقامة واحدة

لاثبات ان ثلاث نقاط في الفضاء تقع على استقامة واحدة، يكفي اثبات وجود متجهين متوازيين بينهما نقطة مشتركة وتكون النقاط الثلاث هي نقاط بداية أو نهاية لهذين المتجهين.

مثال: نفرض في الشكل المجاور المثلث OAB والنقطتان C و D اذا كان $\overrightarrow{OA}=3\vec{a}$ ، $\overrightarrow{OB}=3\vec{b}$ وكانت النقطة C تقع على $\overline{AB}$ حيث $AC=2CB$ وكان $\overrightarrow{BD}=2\vec{a}+\vec{b}$ أثبت ان O و C ، D تقع على استقامة واحدة



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{AB}=-3\vec{a}+3\vec{b}$$

$$AB=AC+CB$$
$$AB=AC+\tfrac{1}{2}AC$$
$$AB=\tfrac{3}{2}AC$$
$$AC=\tfrac{2}{3}AB$$

الحل:-

نقوم باثبات ان $\overrightarrow{OC}\parallel\overrightarrow{OD}$ لان لهما نقطة البداية نفسها

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$$
$$=3\vec{a}+\tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$=3\vec{a}+\tfrac{2}{3}(-3\vec{a}+3\vec{b})=\vec{a}+2\vec{b}$$
$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}$$
$$\overrightarrow{OD}=3\vec{b}+2\vec{a}+\vec{b}=4\vec{b}+2\vec{a}$$
$$\overrightarrow{OD}=2(2\vec{b}+\vec{a})$$
$$\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OC}$$

بما ان $\overrightarrow{OD}$ يساوي $\overrightarrow{OC}$ مضروباً في عدد حقيقي فان $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OD}$ متوازيان وعليه فان C و D و O تقع على استقامة واحدة

رافت صباحي

قياس

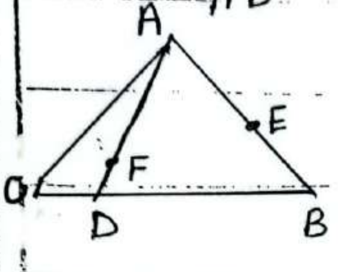
130
التحقق من فهمي ص

يظهر في الشكل المجاور المثلث OAB اذا كان $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$

وكانت النقطة D تقع على $\overline{OB}$ والنقطة E منتصف $\overline{AB}$

والنقطة F تقع على $\overline{AD}$ حيث $\overrightarrow{OF}=\frac{2}{5}(\vec{a}+\vec{b})$

أثبت ان O و F و E تقع على استقامة واحدة



الحل:

نقوم باثبات ان $\overrightarrow{OF} \parallel \overrightarrow{OE}$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE}$$ (قاعدة المثلث)

$$= \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

$$= \vec{b} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA})$$

$$= \vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a})$$

$$= \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} \longrightarrow$$

هنا يكفينا منه طالما اعطانا $\overrightarrow{OF}$ نقوم نجد K

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{a}) \longrightarrow \vec{b}+\vec{a} = 2\overrightarrow{OE} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{2}{5}(\vec{a}+\vec{b}) \longrightarrow \vec{a}+\vec{b} = \frac{5}{2}\overrightarrow{OF}$$

نعوض في (1)

$$\frac{5}{2}\overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OE}$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OE}$$

هذا يعني ان المتجهين $\overrightarrow{OE}$ و $\overrightarrow{OF}$ متوازيان وبما أنهما

من النقطة O نفسها فعليه النقاط F و E و O

على استقامة واحدة

رافت صافي

المعادلة المتجهة للمستقيم

المعادلة المتجهة للمستقيم L الذي يوازي المتجه $\vec{V}$ ويمر بنقطة متجه الموقع لها $\vec{r_0}$ هو $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{V}$ حيث t يسمى المتغير الوسيط

مثال: اكتب معادلة متجهة للمستقيم L الذي يوازي المتجه $\vec{V} = \langle -4, 2, 7 \rangle$ ويمر بالنقطة $U(2, -3, 5)$

الحل:

متجه موقع النقطة U هو $\langle 2, -3, 5 \rangle$

اكتب المعادلة

$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{V}$

عوضا

$\vec{r} = \langle 2, -3, 5 \rangle + t\langle -4, 2, 7 \rangle$

تحقق من فهمك ص 132

جد معادلة متجهة للمستقيم L الذي يوازي المتجه $\vec{V} = \langle 1, -4, -5 \rangle$ ويمر بالنقطة $U(0, -6, 9)$

الحل:

متجه موقع النقطة U هو $\langle 0, -6, 9 \rangle$

$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{V}$

$\vec{r} = \langle 0, -6, 9 \rangle + t\langle 1, -4, -5 \rangle$

راقت صافي

كتابة معادلة متجه للمستقيم مار بنقطتين

نتبع الخطوات الآتية :-

1) إيجاد الصورة الاحداثية للمتجه الموازي ، الذي طرفاه النقطتان المعلومتان ، بصرف النظر عن النقطة الذي يبدأ منها المتجه ونبسطه

2) نعوضها متجه الموقع لأحد النقطتين والمتجه الموازي في صيغة المعادلة المتجهة للمستقيم

مثال جد معادلة متجهة للمستقيم L المار بالنقطتين $P(5,-2,18)$ ، $Q(19,5,-10)$

الحل :-

الصورة الاحداثية

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 19-5, 5+2, -10-18 \rangle = \langle 14, 7, -28 \rangle$$

نبسط بالقسمة على 7

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 2, 1, -4 \rangle$$

نعوض متجه موقع أي نقطة على المستقيم وليس شرطاً P أو Q

$$\vec{r}_0 = \langle 5, -2, 18 \rangle$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{v} = \langle 5, -2, 18 \rangle + t\langle 2, 1, -4 \rangle$$

تحقق من فهمك ص 133

جد معادلة متجهة للمستقيم L المار بالنقطتين $M(3,7,-9)$ ، $N(2,-4,3)$

الحل :

الصورة الاحداثية

$$\overrightarrow{NM} = \langle 3-2, 7+4, -9-3 \rangle = \langle 1, 11, -12 \rangle$$

لا يبسط

$$\vec{r}_0 = \langle 3, 7, -9 \rangle$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{v} = \langle 3, 7, -9 \rangle + t\langle 1, 11, -12 \rangle$$

انتبه توجد أكثر من صورة مكافئة للمعادلة بسبب اختلاف النقطة

رافت صافي

معرفة وقوع نقطة معلومة على معادلة متجه وايجاد نقطة تقع عليه علم احد احداثياتها

مثال: تمثل $\vec{r} = \langle -2, 9, 1\rangle + t\langle -3, 1, 2\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم L

1) بيّن ان النقطة $(19, 2, -13)$ تقع على المستقيم L

2) جد نقطة على المستقيم احداثي z لها هو 25

الحل :- 1)

لكي تقع نقطة معطاه على المستقيم L لا بد من وجود قيمة وحيدة للمتغير t تحقق المعادلات ولكن ان اختلفت قيم t فانها لا تقع

نعوض $\vec{r} = \langle 19, 2, -13\rangle$

$\langle 19, 2, -13\rangle = \langle -2, 9, 1\rangle + t\langle -3, 1, 2\rangle$

جمع متجهات ثم نقارن

$\langle 19, 2, -13\rangle = \langle -2, 9, 1\rangle + \langle -3t, t, 2t\rangle$

$\langle 19, 2, -13\rangle = \langle -2-3t, 9+t, 1+2t\rangle$

$$19 = -2-3t \quad \Big| \quad 2 = 9+t \quad \Big| \quad 1+2t = -13$$
$$3t = -21 \quad \Big| \quad t = -7 \quad \Big| \quad 2t = -14$$
$$t = -7 \quad \Big| \quad \quad \Big| \quad t = -7$$

بما ان للمعادلات الثلاث الحل نفسه (قيمة t نفسها) فان النقطة $(19, 2, -13)$ تقع على المستقيم L

2) نكتب معادلة المستقيم في الصورة الآتية

$\vec{r} = \langle -2, 9, 1\rangle + \langle -3t, t, 2t\rangle$

$\vec{r} = \langle -2-3t, 9+t, 1+2t\rangle$

معطى الاحداثي z وهو 25

$1 + 2t = 25 \rightarrow t = 12$

نعوض $t = 12$ في معادلة المستقيم

$\vec{r} = \langle -2-3(12), 9+12, 1+2(12)\rangle$

$= \langle -38, 21, 25\rangle$

وعليه النقطة الواقعة على المستقيم L والاحداثي z لها هو 25 هي $(-38, 21, 25)$

$\boxed{\text{رافت ضاحي}}$

أتحقق من فهمي ص 134

تمثل :- $\vec{r} = 11\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k} + t(7\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k})$ معادلة متجهة المستقيم L

a) بيّن ان النقطة التي متجه الموقع لها هو $(39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k})$ تقع على المستقيم L

b) جد متجه الموقع للنقطة التي تقع على هذا المستقيم وتقابل القيمة $t = -3$

c) اذا كانت النقطة $(v, -3v, 5v-1)$ تقع على المستقيم L جد قيمة v

الحل :-

a) $39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k} = 11\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k} + 7t\hat{i} - 2t\hat{j} + 5t\hat{k}$

بالمقارنة $39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k} = (11+7t)\hat{i} + (5-2t)\hat{j} + (-6+5t)\hat{k}$

$39 = 11 + 7t$	$-3 = 5 - 2t$	$14 = -6 + 5t$
$7t = 28$	$2t = 8$	$5t = 20$
$t = 4$	$t = 4$	$t = 4$

بما أن للمعادلات الثلاث لها الحل نفسه $(t = 4)$ فان النقطة $(39, -3, 14)$ تقع على المستقيم L لانها تنتج من تعويض $t = 4$ في معادلته

b) نعوض قيمة t

$\vec{r} = (11 + 7(3))\hat{i} + (5 - 2(-3))\hat{j} + (-6 + 5(-3))\hat{k}$

$\vec{r} = -10\hat{i} + 11\hat{j} - 21\hat{k}$

c) متجه الموقع للنقطة $(v, -3v, 5v-1)$ هو $v\hat{i} - 3v\hat{j} + (5v-1)k$

نعوض في معادلة المتجه $v\hat{i} - 3v\hat{j} + (5v-1)\hat{k} = (11+7t)\hat{i} + (5-2t)\hat{j} + (-6+5t)k$

بالمقارنة

$v = 11 + 7t$ — 1

$-3v = 5 - 2t$ — 2

$5v - 1 = -6 + 5t$ — 3

نقوم بحل 1 مع 2 وينتج

$t = -2$, $v = -3$

نتحقق منهما انهما تحقق معادلة 3

$5v - 1 = -6 + 5t$

$-15 - 1 = -6 - 10$ ✓

وعليه قيمة v هي -3

تنويه : نحل أي معادلتين ونتحقق في المعادلة الأخرى

مرافقة ضياء

المستقيمات المتوازية والمتقاطعة والمتخالفة

في الفضاء يكون المستقيمان متوازيين / متقاطعين / متخالفين

اذا كانت $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ معادلة متجهة للمستقيم L_1 وكانت $\vec{r} = \vec{c} + u\vec{d}$ معادلة متجهة للمستقيم L_2 فان $L_1 \parallel L_2$ اذا وفقط اذا كان $\vec{b} \parallel \vec{d}$

يمكن الحكم على تقاطع مستقيمين $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$, $\vec{r} = \vec{c} + u\vec{d}$ بمساواة متجهي الموقع $\vec{r}$ في معادلتيهما وحل المعادلات الثلاث لايجاد قيمة كل من المتغير t والمتغير u فان تحققت المعادلات الثلاث لقيمتي هذين المتغيرين كان المستقيمان متقاطعين ، اذا كان المستقيمان غير متوازيين وغير متقاطعين فانهما يكونان متخالفين

مثال: اذا كانت $\vec{r} = \langle 3, -3, -6 \rangle + t\langle 2, -4, 3 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم L_1 وكانت $\vec{r} = \langle 4, 7, 0 \rangle + u\langle 1, 2, 3 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم L_2 حدد ان كان L_1 و L_2 متوازيين أو متقاطعين أو متخالفين ، ثم جد احداثيات نقطة تقاطعهما اذا كانا متقاطعين

الحل: اتجاه المستقيم L_1 هو $\langle 2, -4, 3 \rangle$ واتجاه المستقيم L_2 هو $\langle 1, 2, 3 \rangle$

هنا لا يوجد عدد حقيقي K بحيث $\vec{V_1} = K\vec{V_2}$ وعليه غير متوازيان

نفحص التقاطع

نساوي $\vec{r}$ في معادلتي المستقيمين L_1 و L_2

$$\langle 3, -3, -6 \rangle + t\langle 2, -4, 3 \rangle = \langle 4, 7, 0 \rangle + u\langle 1, 2, 3 \rangle$$

نجمع

$$\langle 3+2t, -3-4t, -6+3t \rangle = \langle 4+u, 7+2u, 3u \rangle$$

نقارن

$$3+2t = 4+u \quad \text{——} \ (1)$$
$$-3-4t = 7+2u \quad \text{——} \ (2)$$
$$-6+3t = 3u \quad \text{——} \ (3)$$

نقوم بحل معادلة (1) مع (2) مثلاً

وينتج $u = -3$, $t = -1$

ونتحقق من معادلة (3):

$$-6+3t = 3u$$
$$-6-3 = 3(-3) \checkmark$$

بما أن قيمة t وقيمة u حققتا المعادلات الثلاث فإن المستقيمين متقاطعين

لمعرفة احداثيات نقطة تقاطع مستقيمين، نستخدم أي معادلة ولتكن L_1، ونعوض قيمة $t = -1$

$$\vec{r} = \langle 3, -3, -6 \rangle + -1\langle 2, -4, 3 \rangle$$
$$= \langle 3, -3, -6 \rangle + \langle -2, 4, -3 \rangle = \langle 1, 1, -9 \rangle$$

وعليه متجه موقع نقطة تقاطع المستقيمين هو $\langle 1, 1, -9 \rangle$

ونقطة تقاطع المستقيم L_1 و L_2 هي $(1, 1, -9)$

رافت ضباعين

136

التحقق من فهمك ص

اذا كانت $\vec{r} = \langle 3, 7, -9 \rangle + t\langle 1, 11, -12 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم L_1

وكانت $\vec{r} = \langle -30, -6, 30 \rangle + u\langle 4, -6, 3 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم L_2

حدد اذا كان المستقيمان L_1 و L_2 متوازيين أو متقاطعين أو متخالفين

ثم جد احداثيات نقطة تقاطعهما اذا كانا متقاطعين

الحل:

اتجاه المستقيم L_1 هو $\vec{V_1} = \langle 1, 11, -12 \rangle$

اتجاه المستقيم L_2 هو $\vec{V_2} = \langle 4, -6, 3 \rangle$

نلاحظ انه لا توجد عدد حقيقي K بحيث $\vec{V_1} = K\vec{V_2}$ وعليه المستقيمين غير متوازيين

نفحص التقاطع

نساوي $\vec{r}$ من معادلتي المستقيمين

$$\langle 3, 7, -9 \rangle + t\langle 1, 11, -12 \rangle = \langle -30, -6, 30 \rangle + u\langle 4, -6, 3 \rangle$$

$$\langle 3, 7, -9 \rangle + \langle t, 11t, -12t \rangle = \langle -30, -6, 30 \rangle + \langle 4u, -6u, 3u \rangle$$

$$\langle 3+t, 7+11t, -9-12t \rangle = \langle -30+4u, -6-6u, 30+3u \rangle$$

نقارن

$3+t = 30+4u$ — (1)

$7+11t = -6-6u$ — (2)

$-9-12t = 30+3u$ — (3)

بحل المعادلتين (1) و (2)

ينتج $u = 7$, $t = -5$

لنتحقق من المعادلة (3) ←

$-9-12t = 30+3u$

$-9+60 = 30+21$ ✓

بما ان قيمة t وقيمة u حققتا المعادلات الثلاث فان المستقيمين متقاطعان

نعوض $t = -5$ في معادلة L_1

$$\vec{r} = \langle 3, 7, -9 \rangle + -5\langle 1, 11, -12 \rangle$$

$$= \langle 3, 7, -9 \rangle + \langle -5, -55, 60 \rangle = \langle -2, -48, 51 \rangle$$

وعليه يتقاطع المستقيمان في النقطة $(-2, -48, 51)$

رافت صابح

مسائل حياتية

اقلعت طائرة من موقع احداثياته: (0 و7 و13) وفي الوقت نفسه

اقلعت طائرة ثانية من موقع احداثياته (0و5و-2) وبعد

التحليق مدة قصيرة في مساريهما مستقيمين، أصبحت الطائرة الأولى

عند الموقع الذي احداثياته (20و10و19) . واصبحت الطائرة الثانية

عند الموقع الذي احداثياته (20و15و-11) هل خطا سير الطائرتين

متوازيان أم متقاطعان أم متخالفان .

الحل:

نجد المعادلة المتجهة لكل طائرة

* اتجاه خط سير الطائرة الأولى $\langle 19-13, 10-7, 20-0\rangle = \langle 6, 3, 20\rangle$

وعليه المعادلة المتجهة

$$l_1: \vec{r} = \langle 13, 7, 0\rangle + t\langle 6, 3, 20\rangle$$

سير الطائرة الثانية $\langle -11+2, 15-5, 20-0\rangle = \langle -9, 10, 20\rangle$

وعليه المعادلة المتجهة

$$l_2: \vec{r} = \langle -2, 5, 0\rangle + u\langle -9, 10, 20\rangle$$

نفحص التوازي : اتجاه المستقيم l_1 هو $\vec{V}_1 = \langle 6, 3, 20\rangle$

اتجاه المستقيم l_2 هو $\vec{V}_2 = \langle -9, 10, 20\rangle$

نلاحظ انه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{V}_1 = k\vec{V}_2$ وعليه غير متوازيين

نفحص التقاطع

نساوي $\vec{r}$ من معادلتي خطي سير الطائرتين

$$\langle 13, 7, 0\rangle + t\langle 6, 3, 20\rangle = \langle -2, 5, 0\rangle + u\langle -9, 10, 20\rangle$$

$$\langle 13, 7, 0\rangle + \langle 6t, 3t, 20t\rangle = \langle -2, 5, 0\rangle + \langle -9u, 10u, 20u\rangle$$

$$\langle 13+6t, 7+3t, 20t\rangle = \langle -2-9u, 5+10u, 20u\rangle$$

بمساواة الاحداثيات

رائد ضامن

(الاستعمال)

بحل معادلة ① و ③ ينتج

$13+6t=-2-9u$ —— ①

$t=-1$ و $u=-1$

نعوضها في معادلة ②:

$7+3t=5+10u$ —— ②

$7+3t=5+10u$

$20t=20u$ —— ③ $\xrightarrow{\text{نبسط}}$ $t=u$

$7-3\neq5-10$ ✗

بما أن المعادلات الثلاث لم تتحقق في آن واحد معاً ، فإن خطي سير الطائرتين

غير متقاطعين ، وعليه خطا سير الطائرتان متخالفان

تحقق من فهمك ص 138

انطلقت طائرة من موقع احداثياته: (0,7,0) وفي الوقت نفسه ،

طائرة ثانية من موقع احداثياته (0,0,2-) وبعد التحليق مدة

قصيرة في مساريهما المستقيمين أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي

احداثياته (8,15,16) وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي

احداثياته: (22,24,48) . هل خطا سير الطائرتين متوازيان أم

متقاطعان أم متخالفان.

الحل:

اتجاه الطائرة الأولى: $\vec{V_1}=\langle 8-0,15-7,16-0\rangle=\langle 8,8,16\rangle$

نبسط بالقسمة على 8 فيصبح $\langle 1,1,2\rangle$

معادلة مسار الطائرة الأولى $\vec{r}=\langle 0,7,0\rangle+t\langle 1,1,2\rangle$

اتجاه الطائرة الثانية $\vec{V_2}=\langle 22+2,24-0,48-0\rangle=\langle 24,24,48\rangle$

نبسط بالقسمة على 24 فيصبح $\langle 1,1,2\rangle$

معادلة مسار الطائرة الثانية $\vec{r}=\langle -2,0,0\rangle+u\langle 1,1,2\rangle$

نلاحظ ان المسارين متوازيان لأن لهما الاتجاه نفسه

$\langle 1,1,2\rangle=1\langle 1,1,2\rangle$

حيث $k=1$

مرافقة صافي

التدريب وحل المسائل

حدد اذا كان المتجهان متوازيين أم لا في كل مما يلي :-

① $\langle 8, 12, 24\rangle$ و $\langle 15, 10, -20\rangle$

② $\langle 27, -48, -36\rangle$ و $\langle 9, -16, -12\rangle$

③ $\langle -6, -4, 10\rangle$ و $\langle -3, -1, 13\rangle$

④ $\langle 12, -8, 32\rangle$ و $\langle 21, -14, 56\rangle$

الحل :-

1) غير متوازيين لعدم وجود عدد حقيقي بحيث $\langle 15, 10, -20\rangle = k\langle 8, 12, 24\rangle$

2) متوازيين لان $\langle 27, -48, -36\rangle = 3\langle 9, -16, -12\rangle$

3) غير متوازيين لعدم وجود عدد حقيقي بحيث $\langle -6, -4, 10\rangle = k\langle -3, -1, 13\rangle$

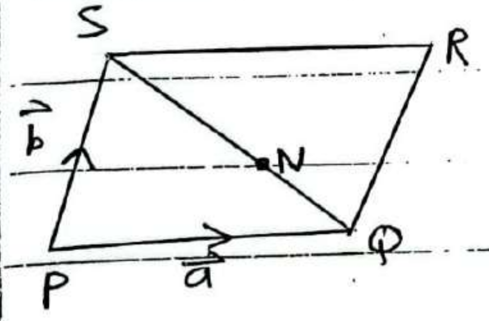
4) متوازيين لان :- $\langle 12, -8, 32\rangle = \frac{4}{7}\langle 21, -14, 56\rangle$

الافضل استخدام التناسب :- $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ ، $\frac{-8}{-14} = \frac{4}{7}$ ، $\frac{32}{56} = \frac{4}{7}$

يمثل الشكل المجاور متوازي الاضلاع PQRS الذي تقع فيه النقطة N على $\overline{SQ}$ حيث $SN : NQ = 3 : 2$ و $\vec{PQ} = \vec{a}, \vec{PS} = \vec{b}$

⑤ اكتب $\vec{SQ}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

⑥ اكتب $\vec{NR}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$



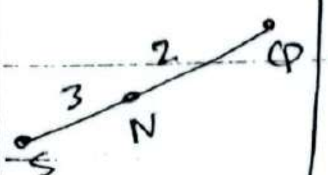
الحل :-

(قاعدة المثلث) $\vec{SQ} = \vec{SP} + \vec{PQ}$

⑤ $\vec{SQ} = -\vec{b} + \vec{a}$

رافت صافي

⑥ قاعدة المثلث $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QR}$ —— ①



$SN = \frac{3}{5} SQ$

$NQ = \frac{2}{5} SQ$

نكتب $\overrightarrow{NQ}$ ، $\overrightarrow{QR}$ بدلالة $\vec{a}$ ، $\vec{b}$

$\overrightarrow{NQ} = \frac{2}{5} \overrightarrow{SQ}$

$= \frac{2}{5}(-b + \vec{a}) = -\frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{a}$

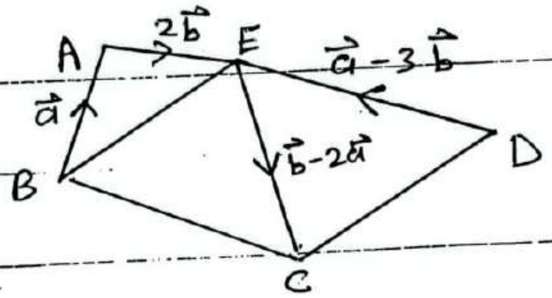
$\overrightarrow{QR} = \vec{b}$ ((لان كل ضلعين متقابلين في متوازي الاضلاع متوازيان ومتساويان))

نعوضها في ① :-

$\overrightarrow{NR} = -\frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{a} + \vec{b} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$

---

⑦ معتمداً المعلومات المعطاه في الشكل المجاور، أثبت ان BEDC متوازي اضلاع.



الحل :-

نبحث عن ضلعين متقابلين متوازيان ومتساويين

قاعدة المثلث $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$

$= \vec{a} + 2\vec{b}$ —— ①

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED}$

$= -b + 2\vec{a} + -\vec{a} + 3\vec{b}$

$= a + 2\vec{b}$ —— ②

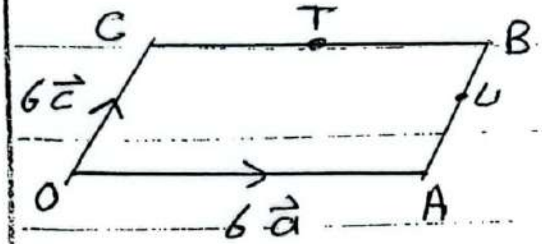
وعليه $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$

الضلعان $\overline{BE}$ و $\overline{CD}$ متوازيين ولهما الطول نفسه وعليه BEDC متوازي اضلاع

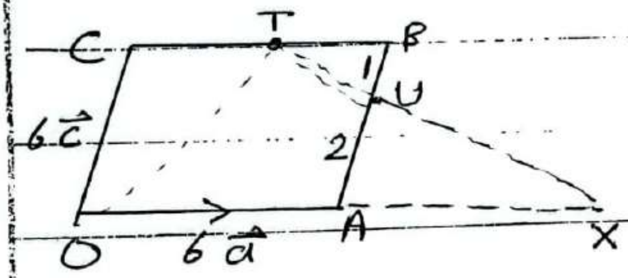
((يكفي اثبات وجود ضلعين متقابلين متساويين ومتوازيين لاثبات ان الشكل متوازي اضلاع))

رافت صافي ٠٧٧٠٥٥٠٥٦٠٠

(8) في متوازي الاضلاع $OABC$ المجاور $\overrightarrow{OA}=6\vec{a}$ و $\overrightarrow{OC}=6\vec{c}$ والنقطة T هي منتصف الضلع $\overline{CB}$ والنقطة U تقسم $\overline{AB}$ بنسبة $1:2$ اذا مد الضلع $\overline{OA}$ على استقامة الى النقطة X حيث $OA=AX$ أثبت ان: T و U و X تقع على استقامة واحدة



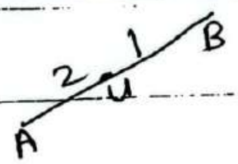
الحل:



نقوم باثبات ان $\overrightarrow{XU}$, $\overrightarrow{XT}$ متوازيان

قاعدة المثلث

$$\overrightarrow{XU}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{AU}$$
$$=-6\vec{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{XU}=-6\vec{a}+\frac{2}{3}(6\vec{c})$$
$$=-6\vec{a}+4\vec{c} \quad (1)$$



$AU=\frac{2}{3}AB$

$UB=\frac{1}{3}AU$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$

ضلعان متوازيان ومتساويان

$$\overrightarrow{XT}=\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OT}$$
$$\overrightarrow{XT}=(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{AO})+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CT}$$
$$\overrightarrow{XT}=(-6\vec{a}+-6\vec{a})+6\vec{c}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{XT}=-12\vec{a}+6\vec{c}+\frac{1}{2}(6\vec{a})$$
$$\overrightarrow{XT}=-12\vec{a}+6\vec{c}+3\vec{a}$$
$$\overrightarrow{XT}=-9\vec{a}+6\vec{c} \quad (2)$$

من معادلة (1):

$$\overrightarrow{XU}=\frac{2}{3}(-9\vec{a}+6\vec{c})$$
$$\overrightarrow{XU}=\frac{2}{3}\overrightarrow{XT}$$

رأفت ضايفي

جد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه $\vec{a}$ ويمر بنقطة متجه الموقع لها $\vec{b}$ في كل مما يأتي :-

9) $\vec{a} = -7\hat{i} + \hat{j}$ و $\vec{b} = 5\hat{i} + 3\hat{j}$

10) $\vec{a} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ و $\vec{b} = -2\hat{i} + 8\hat{k}$

11) $\vec{a} = \langle 4, 3 \rangle$ و $\vec{b} = \langle 9, -2 \rangle$

12) $\vec{a} = \langle 0, -1, 3 \rangle$ و $\vec{b} = \langle 10, 3, -6 \rangle$

الحل :-

9) $\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} = 5\hat{i} + 3\hat{j} + t(-7\hat{i} + \hat{j})$

10) $\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} = -2\hat{i} + 8\hat{k} + t(-3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$

11) $\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} = \langle 9, -2 \rangle + t\langle 4, 3 \rangle$

12) $\vec{r} = \vec{b} + t\vec{a} = \langle 10, 3, -6 \rangle + t\langle 0, -1, 3 \rangle$

جد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي :

13) $(10, 3, -6)$ و $(0, -1, 3)$

14) $(11, -6, 9)$ و $(1, 4, 29)$

15) $(-30, -6, 30)$ و $(-26, -12, 23)$

16) $(-2, 9, 1)$ و $(10, 5, -7)$

الحل :- اتجاه المستقيم

13) $\vec{V} = \langle 10-0, 3+1, -6-3 \rangle = \langle 10, 4, -9 \rangle$

$\vec{r} = \langle 0, -1, 3 \rangle + t\langle 10, 4, -9 \rangle$

رافت ضاهي

نشاط

14) اتجاه المستقيم $\vec{v} = \langle 11-1, -6-4, 9-29 \rangle = \langle 10, -10, -20 \rangle$
$= \langle 1, -1, -2 \rangle$

$\vec{r} = \langle 1, 4, 29 \rangle + t\langle 1, -1, -2 \rangle$

15) اتجاه المستقيم $\vec{v} = \langle -30+26, -6+12, 30-23 \rangle = \langle -4, 6, 7 \rangle$

$\vec{r} = \langle -26, -12, 23 \rangle + t\langle -4, 6, 7 \rangle$

نشاط

16) اتجاه المستقيم $\vec{v} = \langle -2-10, 9-5, 1+7 \rangle = \langle -12, 4, 8 \rangle$
$= \langle -3, 1, 2 \rangle$

$\vec{r} = \langle 10, 5, -7 \rangle + t\langle -3, 1, 2 \rangle$

17) جد احداثيات نقطة تقاطع المستقيمين

$\vec{r} = \langle 4, 4, -7 \rangle + u\langle -1, 3, 1 \rangle$ و $\vec{r} = \langle -2, 2, -1 \rangle + t\langle 1, 2, -1 \rangle$

الحل:

نساوي $\vec{r}$ في المعادلتين

$\langle 4, 4, -7 \rangle + u\langle -1, 3, 1 \rangle = \langle -2, 2, -1 \rangle + t\langle 1, 2, -1 \rangle$

$\langle 4, 4, -7 \rangle + \langle -u, 3u, u \rangle = \langle -2, 2, -1 \rangle + \langle t, 2t, -t \rangle$

$\langle 4-u, 4+3u, -7+u \rangle = \langle -2+t, 2+2t, -1-t \rangle$

$4-u = -2+t$ — (1)
$4+3u = 2+2t$ — (2)
$-7+u = -1-t$ — (3)

بحل معادلة (1) و (2) ينتج
$u = 2, t = 4$

نعوضها في معادلة (3) للتأكد
$-7+2 = -1-4$ ✓

نعوض في معادلة r1

$\vec{r} = \langle 4, 4, -7 \rangle + 2\langle -1, 3, 1 \rangle$
$= \langle 4, 4, -7 \rangle + \langle -2, 6, 2 \rangle = \langle 2, 10, -5 \rangle$ عند $u = 2$

وعليه نقطة تقاطع المستقيمين هي

$(2, 10, -5)$

رافت صباح ٢٠٠٥٤

يمر المستقيم L_1 بالنقطتين E و F ويمر المستقيم L_2 بالنقطتين G و H. حدد اذا كان هذان المستقيمان متوازيين أو متخالفين أو متقاطعين ثم جد احداثيات نقطة التقاطع اذا كانا متقاطعين في كل مما يأتي

18) $E(3,-5,-7)$ و $F(-11,9,14)$ و $G(8,-1,-8)$ و $H(2,5,1)$

19) $E(3,7,-9)$ و $F(2,-4,3)$ و $G(24,14,-29)$ و $H(3,-21,20)$

الحل:

18) $\overrightarrow{EF} = \langle -11-3, 9+5, 14+7 \rangle = \langle -14, 14, 21 \rangle = \langle -2, 2, 3 \rangle$ نبسط

$\overrightarrow{GH} = \langle 2-8, 5+1, 1+8 \rangle = \langle -6, 6, 9 \rangle = \langle -2, 2, 3 \rangle$ نبسط

نلاحظ ان $\langle -2,2,3 \rangle = \langle -2,2,3 \rangle$ وعليه متوازيان

19) $\overrightarrow{EF} = \langle 2-3, -4-7, 3+9 \rangle = \langle -1, -11, 12 \rangle$ نبسط

$\overrightarrow{HG} = \langle 24-3, 14+21, -29-20 \rangle = \langle 21, 35, -49 \rangle = \langle 3, 5, -7 \rangle$

غير متوازيان لسبب عدم وجود K حيث $\vec{V_1} = K\vec{V_2}$

نفحص التقاطع:

نجد معادلة كل مستقيم

معادلة $\overrightarrow{EF}$: $\vec{r} = \langle 3, 7, -9 \rangle + t\langle -1, -11, 12 \rangle$

معادلة $\overrightarrow{GH}$: $\vec{r} = \langle 3, -21, 20 \rangle + u\langle 3, 5, -7 \rangle$

نساوي $\vec{r}$ في كلا المعادلتين

$\langle 3, 7, -9 \rangle + t\langle -1, -11, 12 \rangle = \langle 3, -21, 20 \rangle + u\langle 3, 5, -7 \rangle$

$\langle 3, 7, -9 \rangle + \langle -t, -11t, 12t \rangle = \langle 3, -21, 20 \rangle + \langle 3u, 5u, -7u \rangle$

$\langle 3-t, 7-11t, -9+12t \rangle = \langle 3+3u, -21+5u, 20-7u \rangle$

مرافق ضاحي

$3 - t = 3 + 3u$ — ①
$7 - 11t = -21 + 5u$ — ②
$-9 + 12t = 20 - 7u$ — ③

بحل المعادلتين ① و ② ينتج

$u = -1 \; , \; t = 3$

نتحقق في معادلة ③

$-9 + 36 = 20 + 7$ ✓

وعليه متقاطعان ، نعوض $t = 3$ في معادلة $\overrightarrow{EF}$ أو $u = -1$ في معادلة $\overrightarrow{GH}$

$$\vec{r} = \langle 3, 7, -9 \rangle + 3\langle -1, -11, 12 \rangle = \langle 3, 7, -9 \rangle + \langle -3, -33, 36 \rangle$$
$$= \langle 0, -26, 27 \rangle$$

نقطة تقاطع المستقيمين هي $(0, -26, 27)$

يمر المستقيم L بالنقطتين $A(-2, 9, 1)$ و $B(10, 5, -7)$

20) اكتب معادلة متجهة للمستقيم L.

21) أبيّن ان النقطة $(19, 2, -13)$ تقع على المستقيم L.

22) جد قيمة a اذا كانت النقطة $(1, a, -1)$ تقع على المستقيم L

23) جد نقطة تقع على المستقيم L ، وتقع أيضاً في المستوى xz

24) جد قيمة كل من b و c اذا كانت النقطة $(-8, b, c)$ تقع على المستقيم L

الحل:

20) $\overrightarrow{AB} = \langle 10+2, 5-9, -7-1 \rangle = \langle 12, -4, -8 \rangle$
$= \langle 3, -1, -2 \rangle$

$$\vec{r} = \langle -2, 9, 1 \rangle + t\langle 3, -1, -2 \rangle$$

21)
$\langle 19, 2, -13 \rangle = \langle -2, 9, 1 \rangle + t\langle 3, -1, -2 \rangle$
$\langle 19, 2, -13 \rangle = \langle -2, 9, 1 \rangle + \langle 3t, -t, -2t \rangle$
$\langle 19, 2, -13 \rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t \rangle$

رافت صباح

$19 = -2+3t \rightarrow t = 7$
$2 = 9-t \rightarrow t = 7$
$-13 = 1-2t \rightarrow t = 7$

بما أن المعادلات تعطي الحل نفسه
فإن النقطة (19، 2، -13) تقع
على المستقيم L أيضاً
تنتج من تعويض t=7 في
معادلته

---

22)

النقطة تقع عليه تحقق
معادلته

$\langle 1, a, -1 \rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t \rangle$

$1-2t = -1 \rightarrow t = 1$

$a = 9-t \rightarrow a = 9-1 = 8$

---

24)

النقطة (-8، b، c)
تحقق معادلته

$\langle -8, b, c \rangle = \langle -2+3t, 9-t, 1-2t \rangle$

$-8 = -2+3t \rightarrow t = -2$

$b = 9-t \rightarrow b = 9+2 = 11$

$c = 1-2t \rightarrow c = 1+4 = 5$

---

23)

هنا الإحداثي y صفراً وعليه
لأنها تقع في المستوى xz

$\langle x, 0, z \rangle$

نعوض بدل r ونساوي
الاحداثيات
المتناظرة

$9-t = 0 \rightarrow t = 9$

$x = -2+3t = -2+27 = 25$

$z = 1-2t = 1-18 = -17$

النقطة المطلوبة $(25, 0, -17)$

25) اذا كان $\vec{n} = \langle -5, 4, a \rangle$ و $\vec{m} = \langle 1, -2, 3 \rangle$ وكان المتجهة $3\vec{n} + b\vec{m}$ يوازي المتجه $\langle 3, -3, 5 \rangle$ جد قيمة كل من a و b

الحل:

$3\vec{n} + b\vec{m} = 3\langle -5, 4, a \rangle + b\langle 1, -2, 3 \rangle$

$= \langle -15, 12, 3a \rangle + \langle b, -2b, 3b \rangle$

$= \langle -15 + b, 12 - 2b, 3a + 3b \rangle$

بما انه يوازي $\langle 3, -3, 5 \rangle$ فان

بالمقارنة $\langle -15 + b, 12 - 2b, 3a + 3b \rangle = k\langle 3, -3, 5 \rangle$

$-15 + b = 3k$ —— (1)

$12 - 2b = -3k$ —— (2)

$3a + 3b = 5k$ —— (3)

بحل معادلة (1) و (2) ينتج

$b = -3$, $k = -6$

نعوض في (3) :.

$3a - 9 = -30 \rightarrow a = -7$

---

26) اذا كان $\vec{V} = a\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ c \end{pmatrix}$ جد قيمة كل من a و b و c

علماً بان اتجاه $\vec{V}$ في اتجاه محور y الموجب و $|\vec{V}| = 34$

الحل:

$\vec{V} = \begin{pmatrix} 3a \\ -5a \\ 6a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 4b \\ 6c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + b \\ -5a + 4b \\ 6a + 6c \end{pmatrix}$

تذكير متجه محور y الموجب $\langle 0, 1, 0 \rangle$

متجه محور x الموجب $\langle 1, 0, 0 \rangle$

متجه محور z الموجب $\langle 0, 0, 1 \rangle$

بما انه في اتجاهه فهو يوازيه

وعليه

$\begin{pmatrix} 3a + b \\ -5a + 4b \\ 6a + 6c \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$

وكذلك $|\vec{V}| = \sqrt{0 + k^2 + 0}$

$34 = \sqrt{k^2}$ ومنه $k = 34$

مرافقت ضياء

وعليه :

$$\begin{pmatrix} 3a+b \\ -5a+4b \\ 6a+6c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نقارن

$3a+b=0$ —— ①

$-5a+4b=34$ —— ②

$6a+6c=0$ —— ③

نحل المعادلات ونستنتج

$a=-2 , b=6 , c=2$

متجهات الموقع للنقاط A و B و C الواقعة على مستقيم واحد هي

$a = 2\hat{i}+p\hat{j}+q\hat{k} , \vec{b} = -4\hat{i}+13\hat{j}-k , \vec{c} = 14\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k}$

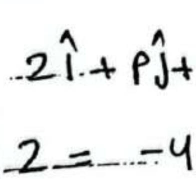
(27) جد قيمة p

(28) جد قيمة q

(29) جد احداثيات نقطة تقاطع المستقيم AB المار بالنقطتين A و B مع المستوى yz

(30) جد طول $\overline{AC}$ في صورة $a\sqrt{14}$ حيث a عدد صحيح

الحل : نجد معادلة المستقيم من خلال اختيار أي نقطتين ولنختار c و b
لا تحتوي مجاهيل



المتجه الموازي $\overrightarrow{BC} = (14+4)\hat{i}+(1-13)\hat{j}+(5+1)\hat{k}$

نبسط $\overrightarrow{BC} = 18\hat{i}-12\hat{j}+6\hat{k}$

$\overrightarrow{BC} = 3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

$\vec{r} = -4\hat{i}+13\hat{j}-k+t(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$

نعوض النقطة a بدل $\vec{r}$ لانها تقع على المستقيم

بالمقارنة $2\hat{i}+p\hat{j}+q\hat{k} = -4\hat{i}+13\hat{j}-k+t(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$

$2=-4+3t \rightarrow t=2$

$p=13-2t \rightarrow p=13-4=9$

$q=-1+t \rightarrow q=-1+2=1$

مرافق ضامن

نجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ ونفسها معادلة $\overleftrightarrow{BC}$

تذكير: النقطة التي تقع في المستوى yz هو $(0, y, z)$

نعوضها بدل $\vec{r}$ في معادلة المستقيم

$$y\hat{j} + z\hat{k} = -4\hat{i} + 13\hat{j} - \hat{k} + t(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$$

بالمقارنة

$$0 = -4 + 3t \rightarrow t = \frac{4}{3}$$

$$y = 13 - 2t \rightarrow y = 13 - 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{31}{3}$$

$$z = -1 + t \rightarrow z = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

النقطة المطلوبة $\left(0, \frac{31}{3}, \frac{1}{3}\right)$

---

30) $A(2, 9, 1)$, $C(14, 1, 5)$

$$\overrightarrow{AC} = \sqrt{(14-2)^2 + (1-9)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{224}$$

$$\overrightarrow{AC} = \sqrt{(16)(14)} = 4\sqrt{14}$$

---

31) $A(1, 2)$ ، $B(2, 3)$ نقطتان في المستوى الاحداثي، جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين، ثم جد معادلة متجهة لهذا المستقيم مقارناً بين المعادلتين.

الحل: نجد الميل $m = \frac{2-3}{1-2} = 1$

$y - 3 = 1(x - 2) \rightarrow y = x + 1$

معادلة ديكارتية في المستوى xy

الآن نجد المعادلة المتجهة للمستقيم

المتجه الموازي $\vec{v} = \langle 1-2, 2-3 \rangle$

$= \langle -1, -1 \rangle$

$$\vec{r} = \langle 2, 3 \rangle + t\langle -1, -1 \rangle$$

رأفت ضايفي

المقارنة ـــ يمكن الوصول للمعادلة الديكارتية من المعادلة المتجهة وذلك بحذف المتغير الوسيط t من المعادلة المتجهة كما يلي

$$\vec{r} = \langle x, y \rangle = \langle 2-t , 3-t \rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2-t \rightarrow t = 2-x \\ y = 3-t \rightarrow t = 3-y \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} 2-x = 3-y \\ y = x+1 \end{array}$$

اذا كان المستقيم l_1 يمر بالنقطة $A(-3, -1, 12)$ والنقطة $B(-2, 0, 11)$ وكان المستقيم l_2 يوازي المستقيم l_1 ويمر بالنقطة $C(11, 9, 12)$ اجب عن السؤالين :

(32) جد معادلة متجهة للمستقيم L_1

(33) جد معادلة متجهة للمستقيم L_2

الحل :

32) المتجه الموازي

$$\vec{V} = \overrightarrow{AB} = \langle -2+3, 0+1, 11-12 \rangle$$
$$= \langle 1, 1, -1 \rangle$$
$$\vec{r} = \langle -3, -1, 12 \rangle + t \langle 1, 1, -1 \rangle$$

33) النقطة جاهزة ونحتاج المتجه الموازي وبما أن $L_2 \parallel L_1$ وعليه المتجه الموازي لهما متساوي $\langle 1, 1, -1 \rangle$

$$\vec{r} = \langle 11, 9, 12 \rangle + t \langle 1, 1, -1 \rangle$$

رأفت صابح

اذا كانت $A(-1,-2,1)$ و $B(-3,4,-5)$ و $C(0,-2,4)$

اجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

34) جد احداثيات النقطة M التي هي منتصف $\overline{AB}$

35) اذا وقعت النقطة N على القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ وكان $2|\overrightarrow{BN}|=|\overrightarrow{NC}|$ جد معادلة متجهة المستقيم المار بالنقطتين M و N .

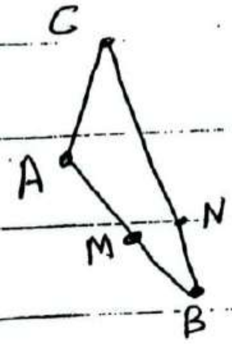
الحل: 34)

$$M=\left(\frac{-3-1}{2}, \frac{4-2}{2}, \frac{-5+1}{2}\right)=(-2, 1, -2)$$

35) هنا تتوفر نقطة M وعليه نحتاج الى الاتجاه الموازي $\overrightarrow{MN}$

قاعدة المثلث

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN} \quad (1)$$



هنا نحتاج معرفة $\overrightarrow{BN}$ بدلالة نقطتين

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NC}$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BN}+2\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{BN}$$

$$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

نعوض في (1)

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{MN}=\langle -3+2, 4-1, -5+2\rangle+\frac{1}{3}\langle 0+3, -2-4, 4+5\rangle$$

$$\overrightarrow{MN}=\langle -1, 3, -3\rangle+\langle 1, -2, 3\rangle$$

$$\overrightarrow{MN}=\langle 0, 1, 0\rangle$$

معادلة المستقيم $\overrightarrow{MN}$

$$\vec{r}=\langle -2, 1, -2\rangle+t\langle 0, 1, 0\rangle$$

راقت صافي

36) يمر المستقيم L_1 بالنقطتين $Q(-2,-3,3)$ و $P(-5,2,4)$

ويمر المستقيم L_2 بالنقطتين $R(0,-8,-1)$ و $S(12,-23,a)$

اذا كان المستقيم L_1 والمستقيم L_2 متقاطعين، جد قيمة a

وما احداثيات نقطة تقاطعهما.

الحل :-

نجد معادلة كل مستقيم

$\overrightarrow{PQ} = \langle -2+5, -3-2, 3-4 \rangle = \langle 3,-5,-1 \rangle$

معادلة $\overrightarrow{PQ}$

$\vec{r} = \langle -2,-3,3 \rangle + t\langle 3,-5,-1 \rangle$

$\overrightarrow{RS} = \langle 12-0, -23+8, a+1 \rangle = \langle 12,-15,a+1 \rangle$

نساوي $\vec{r}$ في كلا المعادلتين

$\vec{r} = \langle 0,-8,-1 \rangle + u\langle 12,-15,a+1 \rangle$

$\langle -2,-3,3 \rangle + t\langle 3,-5,-1 \rangle = \langle 0,-8,-1 \rangle + u\langle 12,-15,a+1 \rangle$

نساوي الاحداثيات المتناظرة بعد فك الاقواس ..

$-2+3t = 12u$ —— (1)

$-3-5t = -8-15u$ —— (2)

$3-t = -1+u(a+1)$ —— (3)

بحل المعادلتين (1) و (2) ينتج $t=2$, $u=\frac{1}{3}$

نعوضهما في معادلة (3) وينتج $a=5$

لمعرفة نقطة التقاطع نعوض $t=2$ في معادلة $\overrightarrow{PQ}$

$\vec{r} = \langle -2,-3,3 \rangle + 2\langle 3,-5,-1 \rangle = \langle 4,-13,1 \rangle$

وعليه نقطة التقاطع هي $(4,-13,1)$

مرافق ضاحي

37) مر القمر الصناعي S_1 بموقعين هما $A(30,-75,90)$ و $B(100,65,220)$

ومر القمر الصناعي S_2 بموقعين هما $C(-20,45,200)$ و

$D(120,85,160)$ حدد العلاقة بين المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ والمستقيم $\overleftrightarrow{CD}$

من معادلتيهما.

الحل :-

$\overrightarrow{AB} = \langle 100-30, 65+75, 220-90 \rangle$

$= \langle 70, 140, 130 \rangle$ نبسط $\rightarrow \langle 7, 14, 13 \rangle$

معادلة $\overleftrightarrow{AB}$

$\vec{r} = \langle 30, -75, 90 \rangle + t\langle 7, 14, 13 \rangle$

$\overrightarrow{CD} = \langle 120+20, 85-45, 160-200 \rangle$

$= \langle 140, 40, -40 \rangle$ نبسط $\rightarrow \langle 7, 2, -2 \rangle$

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{CD}$

$\vec{r} = \langle -20, 45, 200 \rangle + u\langle 7, 2, -2 \rangle$

غير متوازيين لأن $\langle 7, 14, 13 \rangle \neq k\langle 7, 2, -2 \rangle$

نفحص التقاطع

$\langle 30, -75, 90 \rangle + t\langle 7, 14, 13 \rangle = \langle -20, 45, 200 \rangle + u\langle 7, 2, -2 \rangle$

$30 + 7t = -20 + 7u$ — (1)

$-75 + 14t = 45 + 2u$ — (2)

$90 + 13t = 200 - 2u$ — (3)

بحل معادلة (1) و (2) نجد أن

$t = \frac{235}{21}$ و $u = \frac{385}{21}$

وعند التعويض في معادلة (3)

لا تحققها وعليه غير متقاطعين

وعليه فإن المستقيمان متخالفان

مرافق ضياء الدين

38) أرسلت إشارة لاسلكية من موقع إحداثياته $(-1, 4, 5)$ إلى موقع إحداثياته $(-11, 9, 15)$ وفي الوقت نفسه أرسلت إشارة من موقع إحداثياته $(-5, 9, 3)$ إلى موقع إحداثياته $(2, -5, 17)$. إذا علمت أن الإشارة تسير في خط مستقيم، هل تتقاطع مسارا الإشارتين؟

الحل :-

نجد معادلة مسار كل إشارة

$$\langle -11+1, 9-4, 15-5 \rangle = \langle -10, 5, 10 \rangle$$
$$= \langle -2, 1, 2 \rangle$$

$$\vec{r} = \langle -1, 4, 5 \rangle + t\langle -2, 1, 2 \rangle$$

نبسط $\langle 2+5, -5-9, 17-3 \rangle = \langle 7, -14, 14 \rangle$

$$= \langle 1, -2, 2 \rangle$$

$$\vec{r} = \langle -5, 9, 3 \rangle + u\langle 1, -2, 2 \rangle$$

نساوي $\vec{r}$ في كلا المعادلتين

$$\langle -1, 4, 5 \rangle + t\langle -2, 1, 2 \rangle = \langle -5, 9, 3 \rangle + u\langle 1, -2, 2 \rangle$$

$-1 - 2t = -5 + u$ — (1)

$4 + t = 9 - 2u$ — (2)

$5 + 2t = 3 + 2u$ — (3)

نحل معادلة (1) و (2) فينتج $u = 2$, $t = 1$

نعوض في (3) :-

$$5 + 2t = 3 + 2u$$
$$5 + 2 = 3 + 4$$
$$7 = 7 \checkmark$$

وعليه متقاطعان

لمعرفة نقطة التقاطع نعوض $t = 1$:

$$\vec{r} = \langle -1, 4, 5 \rangle + \langle -2, 1, 2 \rangle = \langle -3, 5, 7 \rangle$$

نقطة التقاطع $(-3, 5, 7)$

مراقب صافي

39) يمر المستقيم l_1 بالنقطة Q التي متجه الموقع لها هو $\vec{q} = \langle -6, 14, -19 \rangle$ ويمر أيضاً بالنقطة S التي متجه الموقع لها هو $\vec{s} = \langle -4, 6, -3 \rangle$ ويمر المستقيم l_2 بالنقطة $T(1, 9, 9)$ ويوازي المستقيم $\vec{r} = \langle 5, -6, 1 \rangle + t\langle 4, 7, 4 \rangle$ إذا تقاطع المستقيم l_1 والمستقيم l_2 في النقطة U فأثبت أن المثلث STU متطابق الضلعين

الحل: نجد U

$$\vec{QS} = \langle -4+6, 6-14, -3+19 \rangle = \langle 2, -8, 16 \rangle = \langle 1, -4, 8 \rangle$$

معادلة المستقيم l_1

$$\vec{r} = \langle -6, 14, -19 \rangle + t\langle 1, -4, 8 \rangle$$

بما أن l_2 يوازي المستقيم $\vec{r} = \langle 5, -6, 1 \rangle + t\langle 4, 7, 4 \rangle$ فإن $\vec{v} = \langle 4, 7, 4 \rangle$

معادلة المستقيم l_2

$$\vec{r} = \langle 1, 9, 9 \rangle + u\langle 4, 7, 4 \rangle$$

نساوي $\vec{r_1}$ في المعادلتين

$$\langle -6, 14, -19 \rangle + t\langle 1, -4, 8 \rangle = \langle 1, 9, 9 \rangle + u\langle 4, 7, 4 \rangle$$

$-6 + t = 1 + 4u$ — (1)

$14 - 4t = 9 + 7u$ — (2)

$-19 + 8t = 9 + 4u$ — (3)

بحل المعادلتان (2) و (3)

$t = 3$, $u = -1$

نعوضها في معادلة (1)

$-6 + 3 = 1 - 4$ ✓

نقطة التقاطع $\vec{r} = \langle -6, 14, -19 \rangle + 3\langle 1, -4, 8 \rangle$
$= \langle -3, 2, 5 \rangle$

وعليه إحداثيات U هو $(-3, 2, 5)$

نجد أطوال أضلاع المثلث

$$TU = \sqrt{(-3-1)^2 + (2-9)^2 + (5-9)^2} = 9$$

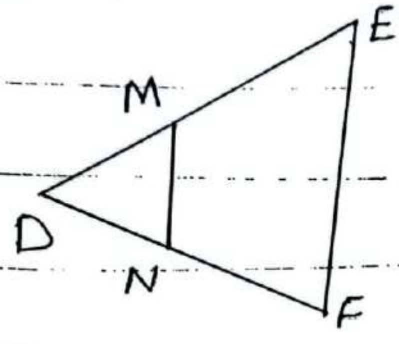
$$SU = \sqrt{(-3+4)^2 + (2-6)^2 + (5+3)^2} = 9$$

بما أن $TU = SU$

فإن المثلث متطابق الضلعين

رافت ضاحي

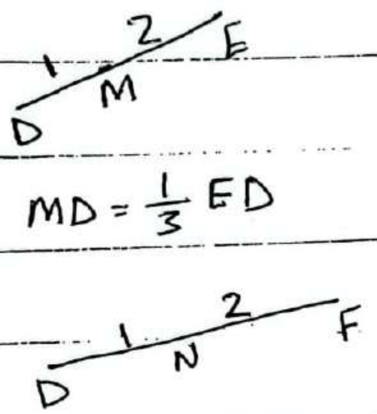
في الشكل المجاور $\overrightarrow{DE}=12\vec{a}$ و $\overrightarrow{DF}=8\vec{b}$ والنقطة M تقسم DE بنسبة 2 : 1 والنقطة N تقسم $\overline{DF}$ بنسبة 1:2



(40) اثبت ان FEMN شبه منحرف

(41) اذا كانت مساحة المثلث DEF تساوي 72 مدمساحة FEMN

الحل :



$MD=\frac{1}{3}ED$

$DN=\frac{1}{3}DF$

(40) نبحث عن ضلعين متقابلين متوازيين

قاعدة المثلث

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DN}$$
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{ED}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$$
$$\cancel{=\frac{1}{3}(-12\vec{a})+\frac{1}{3}(8\vec{b})}$$
$$=\frac{1}{3}(-12\vec{a}+8\vec{b}) \quad (1)$$

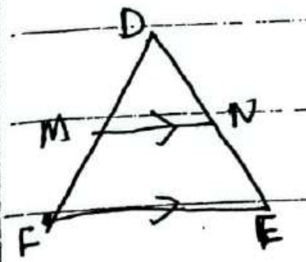
$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}=-12a+8b \quad (2)$$

نعوضها معادلة (2) في (1)

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$$

وعليه $\overrightarrow{MN}\parallel\overrightarrow{EF}$ ، الشكل FEMN رباعي فيه ضلعان متوازيان

فهو شبه منحرف



(41) مساحة شبه المنحرف هي مساحة المثلث الاكبر مطروح منه مساحة المثلث الاصغر

مساحة المثلث DNM $=\frac{1}{2}(DN)(DM)\sin D$ — (1)

مساحة المثلث DFE $=\frac{1}{2}(DF)(DE)\sin D$ — (2)

بقسمة المعادلتين

$$\frac{\text{مساحة المثلث } DNM}{\text{مساحة المثلث } DFE}=\frac{(DN)(DM)}{(DF)(DE)}=\frac{(\frac{1}{3}DF)(\frac{1}{3}DE)}{(DF)(DE)}=\frac{1}{9}$$

بالتعويض

$$\frac{\text{مساحة المثلث } DNM}{72}=\frac{1}{9}\rightarrow \text{مساحة المثلث } DNM=8$$

وعليه مساحة شبه المنحرف $72-8=64$

رافت صابحي

42) تقع النقطة C على المستقيم الذي يحوي النقطتين
$A(13, -10, 15)$ و $B(22, -22, 9)$ اذا كان بعد C عن B
مثلي بعد C عن A جد جميع احداثيات النقطة C الممكنة

الحل :-

نجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين A و B

نبسط $\overrightarrow{AB} = \langle 22-13, -22+10, 9-15 \rangle = \langle 9, -12, -6 \rangle$
$= \langle 3, -4, -2 \rangle$

$\vec{r} = \langle 13, -10, 15 \rangle + t \langle 3, -4, -2 \rangle$

C تقع على المستقيم واحداثياتها :-

$(13+3t, -10-4t, 15-2t)$

من معطيات السؤال :-

نطبق قانون البعد بين نقطتين $BC = 2CA$

$$\sqrt{(22-13-3t)^2+(-22+10+4t)^2+(9-15+2t)^2} = 2\sqrt{(13-13-3t)^2+(-10+10+4t)^2+(15-15+2t)^2}$$

نربع الطرفين مع فك الاقواس ونبسط فينتج

$t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0$

$t=-3$ و $t=1$

عند $t=1$ فإن $C(13+3, -10-4, 15-2) = (16, -14, 13)$

$t=-3$ $C(13-9, -10+12, 15+6) = (4, 2, 21)$

سراقت ضاحي

43) جد جميع النقاط على المستقيم : $\vec{r} = \langle 3, -2, -6 \rangle + t\langle 1, 2, 3 \rangle$
التي تبعد 29 وحدة عن نقطة الأصل

الحل :-

احداثي النقط الواقعة على المستقيم المعطى تكون احداثياتها :-

$C\,(3+t\,,\,-2+2t\,,\,-6+3t)$

بعد C عن نقطة الاصل (0,0,0)

$OC = \sqrt{(3+t)^2+(-2+2t)^2+(-6+3t)^2}$

$29 = \sqrt{9+6t+t^2+4-8t+4t^2+36-36t+9t^2}$

نربع الطرفين ونبسط

$841 = 14t^2 - 38t + 49$ نرتب

$14t^2 - 38t - 792 = 0$

$7t^2 - 19t - 396 = 0$

$(t-9)(7t+44) = 0$

$t = 9\,,\quad t = \frac{-44}{7}$

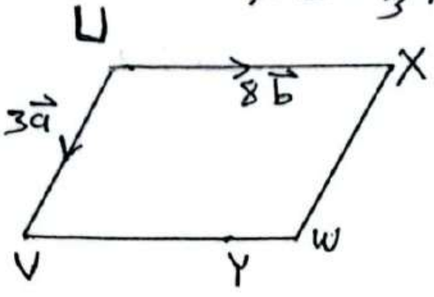
عليه توجد نقطتان :-

عند $t = 9 \longrightarrow (3+9\,,\,-2+18\,,\,-6+27) = (12\,,16\,,21)$

$t = \frac{-44}{7} \longrightarrow \left(-\frac{23}{7}\,,\,\frac{-102}{7}\,,\,\frac{-174}{7}\right)$

م/ أفنان ابراهيم صالح

يمثل الشكل المجاور متوازي الأضلاع UVWX اذا كان $\overrightarrow{UV}=3\vec{a}$ و $\overrightarrow{UX}=8\vec{b}$ وكانت النقطة Y تقع بين V و W حيث $VY=3YW$ و Z هي نقطة حيث $\overrightarrow{XZ}=\frac{4}{3}\overrightarrow{XW}$ أثبت ان U و Y و Z على استقامة واحدة



الحل :- نقوم باثبات ان $\overrightarrow{UY} \parallel \overrightarrow{YZ}$

(قاعدة المثلث)

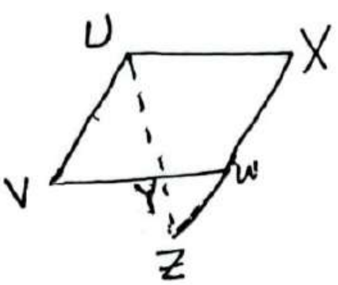
$$\overrightarrow{UY}=\overrightarrow{UV}+\overrightarrow{VY}$$

$$=3\vec{a}+\frac{3}{4}\overrightarrow{VW} \rightarrow \overrightarrow{VW}=\overrightarrow{UX}$$

$$=3\vec{a}+\frac{3}{4}(8\vec{b})$$

$$\overrightarrow{UY}=3\vec{a}+6\vec{b}$$

$$\overrightarrow{UY}=3(\vec{a}+2\vec{b}) \quad (1)$$



قاعدة المثلث

$$\overrightarrow{YZ}=\overrightarrow{YW}+\overrightarrow{WZ}$$

$$=\frac{1}{4}\overrightarrow{VW}+\frac{1}{3}\overrightarrow{XW}$$

$$=\frac{1}{4}(8\vec{b})+\frac{1}{3}(3\vec{a})$$

$$=2\vec{b}+\vec{a} \quad (2)$$

من المعطيات

$\overrightarrow{XW}=3\vec{a}$
$\overrightarrow{VW}=8\vec{b}$
(ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع)

$VW=VY+YW$

$VW=VY+\frac{1}{3}VY$

$VW=\frac{4}{3}VY$

$VY=\frac{3}{4}VW$

$XZ=XW+WZ$

$\frac{4}{3}XW=XW+WZ$

$WZ=\frac{1}{3}XW$

من هنا

$VW=3YW+YW$

$VW=4YW$

$YW=\frac{1}{4}VW$

نعوض (2) في (1) :-

$$\overrightarrow{UY}=3\overrightarrow{YZ}$$

وعليه $\overrightarrow{YZ} \parallel \overrightarrow{UY}$

بما انهما ينطلقان من النقطة Y فان النقاط Y و Z و U تقع على استقامة واحدة

رأفت ابراهيم صالح

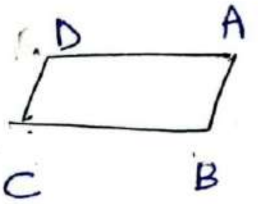
كتاب التمارين

بيّن اذا كان الشكل الرباعي ABCD في الحالتين الآتيتين متوازي اضلاع أم لا.

① $A(3,-2,1)$, $B(-4,0,8)$, $C(-6,5,5)$, $D(8,1,-9)$

② $A(12,5,-8)$, $B(6,2,-10)$, $C(-8,1,13)$, $D(-2,4,15)$

الحل:



1) $\overrightarrow{AB} = \langle -4-3, 0+2, 8-1 \rangle = \langle -7, 2, 7 \rangle$

$\overrightarrow{BC} = \langle -6+4, 5-0, 5-8 \rangle = \langle -2, 5, -3 \rangle$

$\overrightarrow{AD} = \langle 8-3, 1+2, -9-1 \rangle = \langle 5, 3, -10 \rangle$

$\overrightarrow{DC} = \langle -6-8, 5-1, 5+9 \rangle = \langle -14, 4, 14 \rangle$

$\overrightarrow{DC} = 2\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC} \neq k\,\overrightarrow{AD}$

وعليه الشكل ليس متوازي اضلاع.

متوازي الاضلاع يكون كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين بالطول

2) $\overrightarrow{AB} = \langle 6-12, 2-5, -10+8 \rangle = \langle -6, -3, -2 \rangle$

$\overrightarrow{BC} = \langle -8-6, 1-2, 13+10 \rangle = \langle -14, -1, 23 \rangle$

$\overrightarrow{DC} = \langle -8+2, 1-4, 13-15 \rangle = \langle -6, -3, -2 \rangle$

$\overrightarrow{AD} = \langle -2-12, 4-5, 15+8 \rangle = \langle -14, -1, 23 \rangle$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \rightarrow \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$

الشكل متوازي اضلاع لأن كل ضلعين متقابلين متوازيان

---

③ اذا كان $C(3,1,5)$, $B(6,5,4)$, $A(2,3,1)$ وكان ABCD متوازي اضلاع، جد احداثيات D

$\overrightarrow{AB} = \langle 6-2, 5-3, 4-1 \rangle = \langle 4, 2, 3 \rangle$

$\overrightarrow{DC} = \langle 3-x, 1-y, 5-z \rangle$

$\langle 4, 2, 3 \rangle = \langle 3-x, 1-y, 5-z \rangle$

$3-x=4 \rightarrow x=-1$

$1-y=2 \rightarrow y=-1$

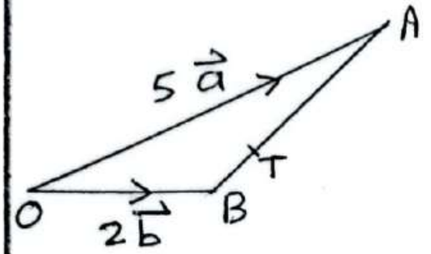
$5-z=3 \rightarrow z=2$

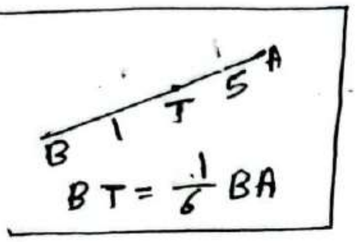
تساوي متجهان اذا كان لهما نفس الطول ونفس الاتجاه

احداثي D هو $(-1,-1,2)$

م. أفنان ابراهيم صافي

(4) في الشكل المجاور ، OAB مثلث ، فيه $\overrightarrow{OA}=5\vec{a}$ و $\overrightarrow{OB}=2\vec{b}$ والنقطة T تقع على الضلع AB حيث $AT:TB=5:1$ بيّن ان $\overrightarrow{OT}$ يوازي $2\vec{b}+\vec{a}$



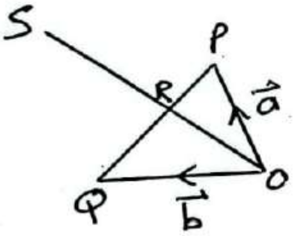


الحل :-

$$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BT} \quad (\text{قاعدة المثلث})$$
$$=2\vec{b}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}$$
$$=2\vec{b}+\frac{1}{6}(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})$$
$$=2\vec{b}+\frac{1}{6}(-2\vec{b}+5\vec{a})$$
$$=2\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{5}{6}\vec{a}$$
$$=\frac{5}{3}\vec{b}+\frac{5}{6}\vec{a}$$
$$\overrightarrow{OT}=\frac{5}{6}(2\vec{b}+\vec{a})$$

وعليه $\overrightarrow{OT}\parallel(2\vec{b}+\vec{a})$

في الشكل المجاور ، OPQ مثلث فيه $\overrightarrow{RQ}=2\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{OS}=3\overrightarrow{OR}$ ، $\overrightarrow{OP}=\vec{a}$ و $\overrightarrow{OQ}=\vec{b}$



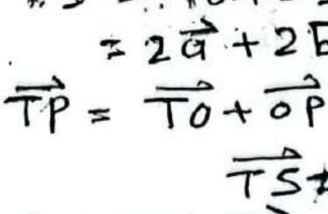
(5) بيّن ان $\overrightarrow{OS}=2\vec{a}+\vec{b}$

(6) اضيفت النقطة T الى الشكل ، حيث $\overrightarrow{OT}=-\vec{b}$ أثبت ان النقاط T و P و S تقع على استقامة واحدة

(5)
$$\overrightarrow{OS}=3\overrightarrow{OR}$$
$$=3(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}) \quad \text{قاعدة المثلث}$$
$$=3(\vec{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ})$$
$$=3(\vec{a}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}))$$
$$=3(\vec{a}+\frac{1}{3}(-\vec{a}+\vec{b}))=3\vec{a}-\vec{a}+\vec{b}$$
$$=2\vec{a}+\vec{b}$$

$PQ=PR+RQ$
$=PR+2PR$
$PQ=3PR$

(6)



$$\overrightarrow{TS}=\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OS}=\vec{b}+2\vec{a}+\vec{b}$$
$$=2\vec{a}+2\vec{b}=2(\vec{a}+\vec{b})$$
$$\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OP}=\vec{b}+\vec{a}$$

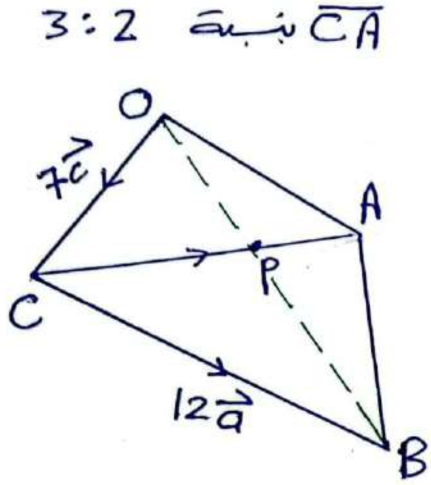
وعليه
$$\overrightarrow{TS}=2\overrightarrow{TP}$$
$$\overrightarrow{TS}\parallel\overrightarrow{TP}$$

النقاط T و P و S تقع على استقامة واحدة

د.أفنان ابراهيم صافي

في الشكل الرباعي OABC المجاور ، $\overrightarrow{OA} = 8\vec{a}$

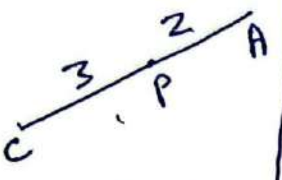
، $\overrightarrow{OC} = 7\vec{c}$ و $\overrightarrow{CB} = 12\vec{a}$ والنقطة P تقسم $\overline{CA}$ بنسبة 3 : 2



(7) جد المتجه $\overrightarrow{OP}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{c}$

(8) أثبت ان النقاط O و P و B تقع على استقامة واحدة

(9) جد النسبة OP : PB



$AP = \frac{2}{5} AC$

الحل : (7) قاعدة المثلث

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$
$$= 8\vec{a} + \frac{2}{5} AC$$
$$= 8\vec{a} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC})$$
$$= 8\vec{a} + \frac{2}{5}(-8\vec{a} + 7\vec{c})$$
$$= 8\vec{a} - \frac{16}{5}\vec{a} + \frac{14}{5}\vec{c} = \frac{24}{5}\vec{a} + \frac{14}{5}\vec{c}$$
$$= \frac{2}{5}(12\vec{a} + 7\vec{c})$$

---

(8) نثبت ان $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$$
$$= 7\vec{c} + 12\vec{a}$$

وعليه $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$

ومنه $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OB}$ متوازيان وعليه B و P و O على استقامة واحدة

(9 من فرع (8) $\frac{OP}{OB} = \frac{2}{5}$

تركيب تناسبي $\frac{OP}{OP + PB} = \frac{2}{5}$

$$5OP = 2OP + 2PB$$
$$3OP = 2 \cdot PB$$

(نقسم على 3PB)

$$\frac{OP}{PB} = \frac{2}{3}$$

رأفت ابراهيم صافي

(10) جد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه $\vec{v}=4\hat{j}-2\hat{k}$ ويمر بالنقطة A التي متجه موقعها $2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$

الحل:

فك أقواس ونجمع الحدود المتشابهة

$$\vec{r}=2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}+t(4\hat{j}-2\hat{k})$$

$$\vec{r}=2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}+4t\hat{j}-2t\hat{k}$$

$$\vec{r}=2\hat{i}+(3+4t)\hat{j}-(5+2t)\hat{k}$$

---

(11) جد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه $\vec{v}=\langle -4,5,8\rangle$ ويمر بالنقطة A التي متجه موقعها هو $\langle 2,-7,11\rangle$

الحل:

فك أقواس وتجميع

$$\vec{r}=\langle 2,-7,11\rangle+t\langle -4,5,8\rangle$$

$$=\langle 2-4t,-7+5t,11+8t\rangle$$

---

(13) جد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي

(12) $(1,-7),(6,19)$

(13) $(-5,4,15),(7,13,-8)$

(14) $(5,22,-8),(13,10,3)$

(15) $(0,2,-5),(9,4,6)$

الحل:

(12)
$$\vec{v}=\langle 6-1,19+7\rangle=\langle 5,26\rangle$$
$$\vec{r}=\langle 1,-7\rangle+t\langle 5,26\rangle$$

(13)
$$\vec{v}=\langle 7+5,13-4,-8-15\rangle=\langle 12,9,-23\rangle$$
$$\vec{r}=\langle -5,4,15\rangle+t\langle 12,9,-23\rangle$$

(14)
$$\vec{v}=\langle 13-5,10-22,3+8\rangle=\langle 8,-12,11\rangle$$
$$\vec{r}=\langle 5,22,-8\rangle+t\langle 8,-12,11\rangle$$

(15)
$$\vec{v}=\langle 9-0,4-2,6+5\rangle=\langle 9,2,11\rangle$$
$$\vec{r}=\langle 0,2,-5\rangle+t\langle 9,2,11\rangle$$

رأفت ابراهيم صباغ

اذا كانت : $\vec{r} = \langle -5, 8, 4\rangle + t\langle 3, -2, 9\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l ، اجب عن الاسئلة الثلاثة الآتية تباعاً

(16) هل تقع النقطة $(3, 7, 11)$ على المستقيم l

(17) اذا وقعت النقطة $(1, b, c)$ على المستقيم l جد قيمة كل من b و c

(18) ما احداثيات نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xz

الحل :

(16) $\langle 3, 7, 11\rangle = \langle -5+3t, 8-2t, 4+9t\rangle$

$-5+3t = 3 \longrightarrow t = \frac{8}{3}$

$8-2t = 7 \longrightarrow t = \frac{1}{2}$

$4+9t = 11 \longrightarrow t = \frac{7}{9}$

بما انه لا توجد قيمة واحدة للوسيط t تحقق المعادلات الثلاث فان النقطة $(3, 7, 11)$ لا تقع على المستقيم

(17) $\langle 1, b, c\rangle = \langle -5+3t, 8-2t, 4+9t\rangle$

$-5+3t = 1 \rightarrow t = 2$

$b = 8-2t \rightarrow b = 8-4 = 4$

$c = 4+9t \rightarrow c = 4+18 = 22$

(18) النقطة في المستوى xz احداثياتها $(x, 0, z)$

$\langle x, 0, z\rangle = \langle -5+3t, 8-2t, 4+9t\rangle$

$8-2t = 0 \rightarrow t = 4$

$x = -5+3t \rightarrow x = -5+12 = 7$

$z = 4+9t \rightarrow z = 4+36 = 40$

النقطة هي $(7, 0, 40)$

رأفت ابراهيم صافي

19) اذا كانت $\vec{r}=\langle 3,2,1\rangle + t\langle 4,a,-12\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت $\vec{r}=\langle -2,4,3\rangle + u\langle 3,-2,-9\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 جد قيمة a التي تجعل $l_1 \parallel l_2$

الحل :-

نأخذ الاقواس ثم نقارن

$\langle 4, a, -12\rangle = k\langle 3, -2, -9\rangle$

$4 = 3k \rightarrow k = \frac{4}{3}$

$a = -2k \rightarrow a = (-2)(\frac{4}{3}) = \frac{-8}{3}$

يمر المستقيم l بالنقطتين $U(P,-3,-1)$ و $V(2,5,-3)$ وتقع النقطة $(7,1,q)$ على l.

20) جد قيمة p

21) اكتب معادلة متجهة للمستقيم l

22) جد قيمة q

الحل :- نجد معادلة المستقيم l

$\vec{VU} = \langle P-2, -3-5, -1+3\rangle$

$\vec{VU} = \langle P-2, -8, 2\rangle$

$\vec{r} = \langle 2, 5, -3\rangle + t\langle P-2, -8, 2\rangle$

نعوض النقطة $(7,1,q)$ بدل $\vec{r}$

$\langle 7,1,q\rangle = \langle 2+t(P-2), 5+-8t, -3+2t\rangle$

$5-8t = 1 \rightarrow t = \frac{1}{2}$

$q = -3+2t \rightarrow q = -3+1 = -2$

$7 = 2+t(P-2) \rightarrow 5 = \frac{1}{2}(P-2) \rightarrow P-2 = 10 \rightarrow P = 12$

معادلة المستقيم حيث عوضنا بدل p و q

$\vec{r} = \langle 2, 5, -3\rangle + t\langle 10, -8, 2\rangle$

$\vec{r} = \langle 2, 5, -3\rangle + t\langle 5, -4, 1\rangle$

رائد ابراهيم صافي

(23) اذا كانت $A(3,-2,4)$ ، وكانت $B(6,0,3)$
وكانت $\vec{r} = \langle 3,-2,4\rangle + \lambda\langle 1,2,-1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت النقطة D تقع على المستقيم l_1 حيث $\lambda = 2$
جد معادلة متجهة للمستقيم l_2 الذي يمر بالنقطة D ويوازي المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$

الحل :-

نحتاج نقطة ومتجه موازٍ

$$\vec{D} = \langle 3,-2,4\rangle + 2\langle 1,2,-1\rangle = \langle 3+2, -2+4, 4-2\rangle = \langle 5,2,2\rangle$$

$$\vec{AB} = \langle 6-3, 0+2, 3-4\rangle = \langle 3,2,-1\rangle$$

$$\vec{r} = \langle 5,2,2\rangle + t\langle 3,2,-1\rangle$$

حدد اذا كان المستقيمان l_1 و l_2 متوازيين أو متخالفين أو متقاطعين ثم جد احداثيات نقطة التقاطع اذا كانا متقاطعين في كل مما يأتي

(24) مرور المستقيم l_1 بالنقطتين: $(4,3,3)$ و $(5,2,1)$ ومرور المستقيم l_2 بالنقطتين $(5,1,0)$ و $(4,1,1)$

(25) مرور المستقيم l_1 بالنقطتين $(5,3,1)$ و $(3,1,-2)$ ومرور المستقيم l_2 بالنقطتين $(11,7,-3)$ ، و $(9,6,-2)$

الحل :

(24) نجد معادلة كل مستقيم

$$l_1 : \vec{v} = \langle 5-4, 2-3, 1-3\rangle = \langle 1,-1,-2\rangle$$
$$\vec{r} = \langle 4,3,3\rangle + t\langle 1,-1,-2\rangle$$

$$l_2 : \vec{v} = \langle 4-5, 1-1, 1-0\rangle = \langle -1,0,1\rangle$$
$$\vec{r} = \langle 5,1,0\rangle + u\langle -1,0,1\rangle$$

غير متوازيان لأن

$$\langle 1,-1,-2\rangle \neq k\langle -1,0,1\rangle$$

نفحص التقاطع

رأفت ابراهيم صافي

$$\langle 4,3,3\rangle + t\langle 1,-1,-2\rangle = \langle 5,1,0\rangle + u\langle -1,0,1\rangle$$

$4+t=5-u$ — ①

$3-t=1 \longrightarrow t=2$

$3-2t=u$ — ②

بحل معادلة ① :

$4+2=5-u$

$u=-1$

نعوضها في معادلة ② :

$3-2t=u$

$3-4=-1$ ✓

وعليه المستقيمان متقاطعان

$$\vec{r}=\langle 4,3,3\rangle + 2\langle 1,-1,-2\rangle = \langle 4+2, 3-2, 3-4\rangle = \langle 6,1,-1\rangle$$

وعليه نقطة التقاطع هي $(6,1,-1)$

---

25 نجد معادلة كل مستقيم :

اتجاه L_1 : $\langle 5-3, 3-1, 1+2\rangle = \langle 2,2,3\rangle$

$\vec{r}=\langle 3,1,-2\rangle + t\langle 2,2,3\rangle$

اتجاه L_2 : $\langle 11-9, 7-6, -3+2\rangle = \langle 2,1,-1\rangle$

$\vec{r}=\langle 9,6,-2\rangle + u\langle 2,1,-1\rangle$

غير متوازيين لأن : $\langle 2,2,3\rangle \neq k\langle 2,1,-1\rangle$

نفحص التقاطع :

$$\langle 3+2t, 1+2t, -2+3t\rangle = \langle 9+2u, 6+u, -2-u\rangle$$

$3+2t=9+2u$ — ①

$1+2t=6+u$ — ②

$-2+3t=-2-u$ — ③

بحل معادلة ① و ② ينتج

$u=-1$, $t=2$

نعوضها في معادلة ③ :

$-2+3t=-2-u$

$-2+6=-2+1$

$4\neq -1$ ✗

وعليه المستقيمين غير متقاطعين وغير متوازيين فعليه متقاطعين.

أ. فداء ابراهيم صافي

(26) يمر المستقيم l بالنقطتين $A(2,1,3)$ و $B(5,-2,1)$ اذا وقعت النقطة C على المستقيم l وكان $AC=3CB$ جد جميع احداثيات النقطة C الممكنة

الحل :-

نجد معادلة المستقيم

$$\vec{AB} = \langle 5-2, -2-1, 1-3\rangle = \langle 3, -3, -2\rangle$$

$$\vec{r} = \langle 2,1,3\rangle + t\langle 3,-3,-2\rangle$$

احداثي النقطة C هو

$$(2+3t, 1-3t, 3-2t)$$

$$AC = 3CB$$

$$\sqrt{(2+3t-2)^2+(1-3t-1)^2+(3-2t-3)^2} = 3\sqrt{(2+3t-5)^2+(1-3t+2)^2+(3-2t-1)^2}$$

بتربيع الطرفين وحل المعادلة ...

$$t=\frac{3}{2} , t=\frac{3}{4}$$

عند $t=\frac{3}{2}$:

$$\left(2+\frac{9}{2}, 1-\frac{9}{2}, 3-3\right) = \left(\frac{13}{2}, \frac{-7}{2}, 0\right)$$

$t=\frac{3}{4}$

$$\left(2+\frac{9}{4}, 1-\frac{9}{4}, 3-\frac{6}{4}\right) = \left(\frac{17}{4}, \frac{-5}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

د. أفنان ابراهيم صافي

(27) المستقيمات الآتية معادلاتها المتجهة هي :-

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-2\\-4\end{pmatrix},\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}2\\-5\\2\end{pmatrix}$$

بيّن ان هذه المستقيمات تكون مثلثاً ، ثم جد اطوال اضلاعه

الحل :-

هنا نثبت ان كل زوج من ازواج المستقيمات متقاطعان ونجد نقطة التقاطع

اولاً

$$\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$-3+5t=1+s \quad (1)$$
$$1-2t=5+s \quad (2)$$
$$4-4t=-4-2s \quad (3)$$

بحل معادلة (1) و (2) ينتج

$s=-4 ,\ t=0$

نعوض في (3) :-

$$4-4t=-4-2s$$
$$4=-4+8 \ ✓$$

نجد نقطة التقاطع : نعوض $t=0$ $\quad \langle -3+5t , 1-2t , 4-4t\rangle$

$A(-3,1,4)$

الافضل كتابتها على صورة $\langle\ \rangle$

ثانياً :-

$$\langle 1+s , 5+s , -4-2s\rangle=\langle 2+2q , -1-5q , 2q\rangle$$

$$1+s=2+2q \quad (1)$$
$$5+s=-1-5q \quad (2)$$
$$-4-2s=2q \quad (3)$$

بحل معادلة (1) مع (2) ينتج

$q=-1 ,\ s=-1$

نعوض في معادلة (3) :-

$$-4-2s=2q$$
$$-4+2=2(-1) \ ✓$$

نعوض $s=-1$

$$\langle 1-1 , 5-1 , -4+2\rangle$$

نقطة التقاطع

$B(0,4,-2)$

رافد ابراهيم صالح

ثالثاً :- $\langle -3+5t,\ 1-2t,\ 4-4t \rangle = \langle 2+2q,\ -1-5q,\ 2q \rangle$

$-3+5t = 2+2q$ —— ①

$1-2t = -1-5q$ —— ②

$4-4t = 2q$ —— ③

بحل معادلة ② و ③

$q=0\ ,\ t=1$

نعوضها في معادلة ① :-

$-3+5 = 2+0$

$2=2$ ✓

نقطة التقاطع بعوض $q=0$

$C(2,-1,0)$

وعليه كل مستقيمين يتقاطعان في نقطة

نجد الأطوال :-

$AB = \sqrt{(0+3)^2+(4-1)^2+(-2-4)^2}$

$= \sqrt{9+9+36} = \sqrt{54}$

$BC = \sqrt{(2-0)^2+(-1-4)^2+(-2-0)^2}$

$= \sqrt{4+25+4} = \sqrt{33}$

$AC = \sqrt{(2+3)^2+(-1-1)^2+(0-4)^2}$

$= \sqrt{25+4+16} = \sqrt{45}$

د. أفنان إبراهيم صافي

الدرس (3)

الضرب القياسي

أولاً :- الضرب القياسي للمتجهات

اذا كان $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ و $\vec{V} = \langle V_1, V_2, V_3 \rangle$ فان

$$\vec{V} \cdot \vec{w} = V_1 w_1 + V_2 w_2 + V_3 w_3$$

حيث $\vec{V} \cdot \vec{w}$ تمثل الضرب القياسي للمتجهين وتقرأ $\vec{V}$ dot $\vec{w}$

انتبه :- ناتج الضرب القياسي يساوي عدد ثابت وليس متجه

لاي 3 متجهات $\vec{u}$ و $\vec{w}$ و $\vec{V}$ واي عدد حقيقي c :-

1) $\vec{V} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{V}$

2) $\vec{u} \cdot (\vec{V} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{V} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

3) $c(\vec{u} \cdot \vec{V}) = (c\vec{u}) \cdot \vec{V}$

مثال :- جد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي :-

1) $\vec{a} = \langle 4, -6, 5 \rangle$ و $\vec{b} = \langle 3, 7, 2 \rangle$

2) $\vec{V} = 5\hat{i} + 4\hat{j} + 8\hat{k}$, $\vec{w} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$

الحل :-

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (4)(3) + (-6)(7) + (5)(2)$

$= 12 - 42 + 10 = -20$

2) $\vec{V} \cdot \vec{w} = (5)(4) + (4)(3) + (8)(-4)$

$= 20 + 12 - 32$

$= 0$

رافت صافي

التحقق من فهمك ص ١٤٩

جد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي :

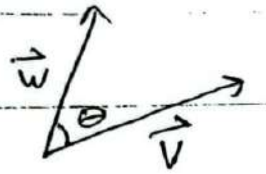
a) $\vec{v}=\langle 4,8,-3\rangle$ و $\vec{w}=\langle -3,7,2\rangle$

b) $\vec{m}=-3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$ و $\vec{n}=-12\hat{i}+6\hat{j}-8\hat{k}$

الحل :

a) $\vec{v}\cdot\vec{w}=(4)(-3)+(8)(7)+(-3)(2)=-12+56-6=38$

b) $\vec{m}\cdot\vec{n}=(-3)(-12)+(5)(6)+(-1)(-8)=36+30+8=74$



ثانياً: الزاوية بين متجهين في الفضاء

اذا كان $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهين غير صفريين فانه

يمكن قياس الزاوية بينهما θ باستعمال الصيغة الآتية

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}\right)$$

ملاحظة

1) اذا كان $\vec{v}\cdot\vec{w}<0$ ، هنا الزاوية منفرجة

$\vec{v}\cdot\vec{w}>0$ " " حادة

$\vec{v}\cdot\vec{w}=0$ " " قائمة وعليه المتجهان متعامدان

خطوات ايجاد الزاوية :

* جد اطوال $|\vec{v}|$ و $|\vec{w}|$
* جد $\vec{v}\cdot\vec{w}$ ، $|\vec{v}||\vec{w}|$
* حل بالقانون // اذا احتجنا آلة حاسبة نستخدم نظام (degree)

اذا طلب جيب تمام الزاوية

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$$

رافت صابح

مثال :- اذا كان $\vec{V} = \langle 5, -2, 1 \rangle$ وكان $\vec{W} = \langle -3, 1, 4 \rangle$ جد قياس الزاوية θ بين المتجه $\vec{V}$ والمتجه $\vec{W}$ الى اقرب عشر درجة

الحل :-

$|\vec{V}| = \sqrt{25+4+1} = \sqrt{30}$ ، $|\vec{W}| = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}$

$\vec{V} \cdot \vec{W} = (-3)(5) + (1)(-2) + (4)(1) = -15 - 2 + 4 = -13$ (منفرجة)

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{V} \cdot \vec{W}}{|\vec{V}||\vec{W}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-13}{\sqrt{30}\sqrt{26}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-13}{\sqrt{780}}\right)$

$\theta \simeq 117.7°$ باستعمال الآلة الحاسبة

التحقق من فهمك ص 146 جد قياس الزاوية θ بين المتجه $\vec{U}$ والمتجه $\vec{W}$

a) $\vec{U} = -3\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$
$\vec{W} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

الحل :

$|\vec{U}| = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50}$

$|\vec{W}| = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$

$\vec{U} \cdot \vec{W} = (-3)(4) + (5)(2) + (-4)(-3)$
$= -12 + 10 + 12$
$= 10$ حادة

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{U} \cdot \vec{W}}{|\vec{U}||\vec{W}|}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{50}\sqrt{29}}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{1450}}\right)$

$\simeq 74.8°$

b) $\vec{U} = \langle 2, -10, 6 \rangle$
$\vec{W} = \langle -3, 15, -9 \rangle$

الحل :

$|\vec{U}| = \sqrt{4+100+36} = \sqrt{140}$

$|\vec{W}| = \sqrt{9+225+81} = \sqrt{315}$

$\vec{U} \cdot \vec{W} = (2)(-3) + (-10)(15) + (6)(-9)$
$= -6 - 150 - 54$
$= -210$ منفرجة

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{U} \cdot \vec{W}}{|\vec{U}||\vec{W}|}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{-210}{\sqrt{140}\sqrt{315}}\right)$

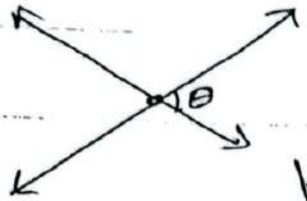
$= \cos^{-1}(-1)$

$= 180°$

رافت صابح

ثالثاً :- الزاوية بين مستقيمين في الفضاء

نستطيع ايجاد الزاوية بين مستقيمين وذلك بايجاد الزاوية بين اتجاهيهما .



1) نحدد اتجاه كل مستقيم

2) نجد $\vec{w}\cdot\vec{v}$ ومقدار كل متجه $|\vec{w}|$ و $|\vec{v}|$

3) نطبق القانون $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}\right)$

4) اذا طلب الزاوية الحادة هنا نطرح (مقدار الزاوية المنفرجة) $- 18$

مثال :- اذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix}6\\-3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}8\\2\\-3\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1

وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-4\\9\\-1\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2.

جد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_1 والمستقيم l_2 الى أقرب عشر درجة

الحل :-

اتجاه المستقيم l_1 هو :- $\vec{v} = \begin{pmatrix}8\\2\\-3\end{pmatrix}$ واتجاه المستقيم l_2 هو $\vec{w} = \begin{pmatrix}-4\\9\\-1\end{pmatrix}$

منفرجة $\vec{v}\cdot\vec{w} = (8)(-4) + (2)(9) + (-3)(-1) = -32 + 18 + 3 = -11$

$|\vec{v}| = \sqrt{64+4+9} = \sqrt{77}$ و $|\vec{w}| = \sqrt{16+81+1} = \sqrt{98}$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{|\vec{w}||\vec{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-11}{\sqrt{77}\sqrt{98}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-11}{\sqrt{7549}}\right)$$

$\theta \simeq 97.3$

قياس الزاوية المنفرجة بين المستقيم l_1 والمستقيم l_2 هو 97.3°

ومقياس الزاوية الحادة بينهما هو $180 - 97.3 = 82.7^\circ$

التحقق من فهمي ص 147

اذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 جد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_1 والمستقيم l_2 الى أقرب درجة.

الحل :-

اتجاه المستقيم l_1 هو $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix}$ واتجاه المستقيم l_2 هو $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$

فاذا

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (1)(2) + (0)(-5) + (-3)(-1) = 2 + 0 + 3 = 5$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10} \quad , \quad |\vec{v}| = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$$

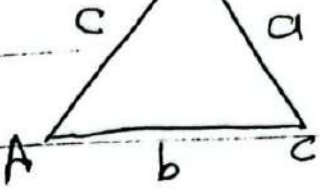
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{30}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{300}}\right)$$

$$\theta \simeq 73^\circ$$

وعليه قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l_1 و l_2 هو 73°

رابعاً :- ايجاد مساحة المثلث

اذا علمت احداثيات رؤوس مثلث في الفضاء ، فستطيع استعمال الضرب القياسي للمتجهات في ايجاد مساحته وذلك بتحديد متجهين يمثلان ضلعين في المثلث لهما نقطة البداية نفسها وأجد طوليهما والزاوية بينهما ونطبق القانون :-



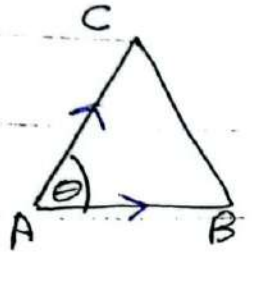
$$Area = \frac{1}{2}\, bc \sin A$$

$$Area = \frac{1}{2}\, ac \sin B$$

$$Area = \frac{1}{2}\, ab \sin C$$

مثال: جد مساحة المثلث ABC الذي احداثيات رؤوسه هي:

$A(5,6,-2)$ ، $B(2,-2,1)$ و $C(2,-3,6)$



الحل:

(نحدد متجهان)

$\overrightarrow{AC} = \langle 2-5, -3-6, 6+2\rangle = \langle -3, -9, 8\rangle$

$\overrightarrow{AB} = \langle 2-5, -2-6, 1+2\rangle = \langle -3, -8, 3\rangle$

(نجد مقدار كل منهما)

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9+81+64} = \sqrt{154}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+64+9} = \sqrt{82}$

(نجد الزاوية)

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (-3)(-3) + (-9)(-8) + (8)(3) = 105$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{105}{\sqrt{82}\sqrt{154}}\right)$

$\theta \simeq 20.9^\circ$

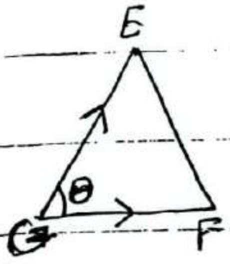
$\text{Area} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{82}\sqrt{154}\sin 20.9$

$\simeq 20$

تحقق من فهمك ص149

جد مساحة المثلث EFG الذي احداثيات رؤوسه

$E(2,1,-1)$ ، $F(5,1,7)$ ، $G(6,-3,1)$



الحل:

$\overrightarrow{GF} = \langle 5-6, 1+3, 7-1\rangle = \langle -1, 4, 6\rangle$

$\overrightarrow{GE} = \langle 2-6, 1+3, -1-1\rangle = \langle -4, 4, -2\rangle$

$|\overrightarrow{GF}| = \sqrt{1+16+36} = \sqrt{53}$, $|\overrightarrow{GE}| = \sqrt{16+16+4} = 6$

$\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{GE} = (-1)(-4) + (4)(4) + (6)(-2) = 4+16-12 = 8$

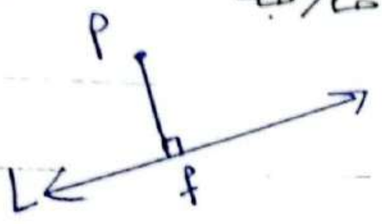
$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GE}}{|\overrightarrow{GF}||\overrightarrow{GE}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{8}{6\sqrt{53}}\right)$

$\theta \simeq 79.4^\circ$

$A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{GF}||\overrightarrow{GE}|\sin\theta$

$= \left(\frac{1}{2}\right)(6)(\sqrt{53})\sin 79.4 \simeq 21.5^\circ$

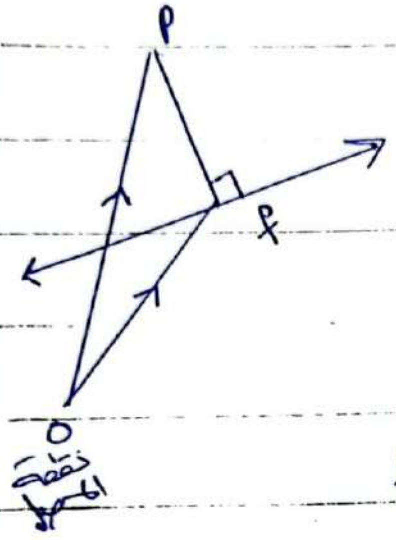
خامساً :- مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجه



في الشكل المجاور المستقيم L والنقطة P تقع خارجه وعند انزال عمود من النقطة P على المستقيم L في النقطة f فان النقطة f تسمى مسقط العمود واذا كانت O نقطة الاصل فان

$$\vec{Pf} = \vec{Of} - \vec{OP}$$

حيث $\vec{OP}$ ، $\vec{Of}$ متجها موقع



خطوات ايجاد احداثيات النقطة f

1) نكتب القاعدة $\vec{Pf} = \vec{Of} - \vec{OP}$

2) P نقطة بالسؤال ومنها نجد $\vec{OP}$
أما $\vec{Of}$ يتم ايجادها من خلال ان النقطة f تقع على المستقيم L وبالتالي تحقق معادلته ومنه نجد $\vec{Pf}$

3) نجد t حيث نطبق القاعدة $\vec{Pf} \perp L$ (متعامدان) فان $\vec{Pf} \cdot \vec{L} = 0$

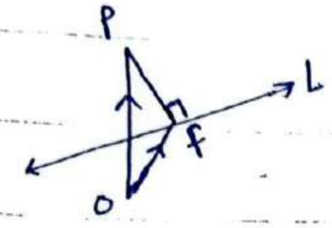
4) قيمة t الناتجة من الفرع ③ يتم تعويضها في $\vec{Of}$ وبالتالي نجد احداثيات f

رافت صابح

مثال٤: اذا كانت $\vec{r}=\langle 28,-10,-4\rangle + t\langle 8,3,-6\rangle$ معادلة متجهه للمستقيم L والنقطة $P(3,-4,2)$ غير واقعة على المستقيم L اجب عن السؤالين

1) حدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم L

2) جد البعد بين النقطة P والمستقيم L



الحل: نجهز كل من $\vec{OP}$ و $\vec{Of}$

1) $\vec{OP}=\langle 3,-4,2\rangle$

النقطة f تقع على المستقيم L فهي تحقق معادلته

$$\vec{Of}=\langle 28+8t,-10+3t,-4-6t\rangle$$

$$\vec{Pf}=\vec{Of}-\vec{OP}=\langle 28+8t,-10+3t,-4-6t\rangle-\langle 3,-4,2\rangle$$

$$=\langle 25+8t,-6+3t,-6-6t\rangle$$

بما أن $\vec{PF}\perp L$ فان $\vec{Pf}$ عمودي على اتجاه L ، $\vec{PF}\perp\langle 8,3,-6\rangle$

الضرب القياسي صفراً

$$(25+8t)(8)+(-6+3t)(3)+(-6-6t)(-6)=0$$

$$200+64t-18+9t+36+36t=0$$

$$104t=-218 \rightarrow t=-2$$

نعوض t في $\vec{Of}$: $\vec{Of}=\langle 28-16,-10-6,-4+12\rangle=\langle 12,-16,8\rangle$

وعليه مسقط العمود من النقطة P على المستقيم L هو $(12,-16,8)$

2) البعد بين النقطة P والمستقيم L هو طول القطعة المستقيمة من النقطة P الى النقطة f :

* اجد المتجه $\vec{PF}$:

$$\vec{PF}=\langle 25-16,-6-6,-6+12\rangle$$

$$=\langle 9,-12,6\rangle$$

$$|\vec{PF}|=\sqrt{81+144+36}=\sqrt{261}$$

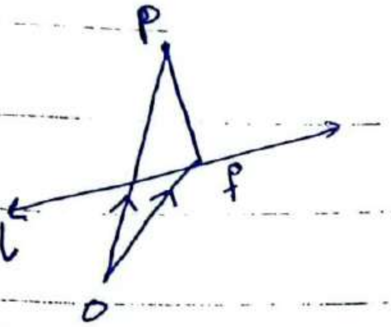
التحقق من فهمي ص151

اذا كانت $\vec{r} = 16\hat{i} + 11\hat{j} - 3\hat{k} + t\langle 5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k} \rangle$

معادلة متجهة للمستقيم l والنقطة $P(2, 0, \frac{10}{3})$ غير واقعة على المستقيم l

a) حدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l

b) جد البعد بين النقطة P والمستقيم l.



الحل: نجهز $\overrightarrow{Pf} = \overrightarrow{Of} - \overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{OP} = 2\hat{i} + \frac{10}{3}\hat{k}$

$\overrightarrow{Of} = (16 + 5t)\hat{i} + (11 + 7t)\hat{j} + (-3 - 3t)\hat{k}$

$\overrightarrow{Pf} = (14 + 5t)\hat{i} + (11 + 7t)\hat{j} + (-\frac{19}{3} - 3t)\hat{k}$

بما أن $\overrightarrow{Pf} \perp l$ فإن $\overrightarrow{Pf} \cdot \vec{V} = 0$ حيث $\vec{V} = 5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}$

$(5)(14 + 5t) + (7)(11 + 7t) + (\frac{-19}{3} - 3t)(-3) = 0$

$70 + 25t + 77 + 49t + 19 + 9t = 0$

$166 + 83t = 0 \rightarrow t = -2$

$\overrightarrow{Of} = (16 - 10)\hat{i} + (11 - 14)\hat{j} + (-3 + 6)\hat{k} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$

وعليه مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l هو النقطة $(6, -3, 3)$

b) نجد مقدار المتجه $\overrightarrow{Pf}$

$\overrightarrow{Pf} = (14 - 10)\hat{i} + (11 - 14)\hat{j} + (\frac{-19}{3} + 6)\hat{j}$

$\overrightarrow{Pf} = 4\hat{i} - 3\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{j}$

$|\overrightarrow{Pf}| = \sqrt{16 + 9 + \frac{1}{9}} = \sqrt{25 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{226}{9}} = \frac{\sqrt{226}}{3}$

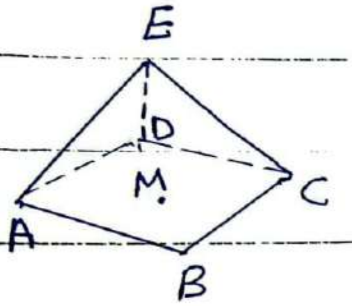
رافت صافي

سادساً :- استعمال المتجهات لتحديد قياسات في أشكال ثلاثية الأبعاد .

مثال : يظهر في الشكل المجاور الهرم ABCDE الذي قاعدته المربع ABCD وإحداثيات رؤوسها :-

A(1,1,-1) , B(9,-1,-3) , C(9,-7,3) , D(1,-5,5) , E(8,3,7)

ومركزه النقطة M :



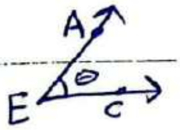
1) جد $m\angle AEC$ لأقرب عشر درجة

2) بيّن أن $m\angle AME = 90°$

3) جد قياس $\angle EDB$

4) جد حجم الهرم .

الحل :-



1) نجد متجهين لهما نقطة البداية نفسها

ملاحظة

الحرف m واختصار قياس

$\overrightarrow{EA} = \langle 1-8, 1-3, -1-7\rangle = \langle -7, -2, -8\rangle$

$\overrightarrow{EC} = \langle 9-8, -7-3, 3-7\rangle = \langle 1, -10, -4\rangle$

$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC} = (-7)(1) + (-2)(-10) + (-8)(-4)$

$= -7 + 20 + 32 = 45$

$|\overrightarrow{EA}| = \sqrt{49+4+64} = \sqrt{117}$

$|\overrightarrow{EC}| = \sqrt{1+100+16} = \sqrt{117}$

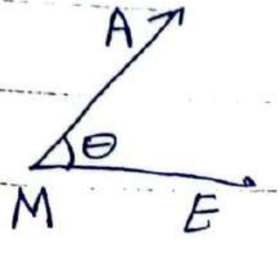
$$m\angle AEC = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{EA}||\overrightarrow{EC}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{45}{\sqrt{117}\sqrt{117}}\right)$$

$$\simeq 67.4°$$

راقت صافي

2) M هي مركز المربع وعليه هي نقطة منتصف القطر $\overrightarrow{AC}$

$$M = \left(\frac{1+9}{2}, \frac{1-7}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (5, -3, 1)$$

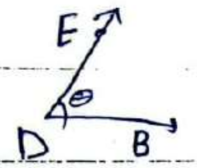


$$\overrightarrow{MA} = \langle 1-5, 1+3, -1-1 \rangle = \langle -4, 4, -2 \rangle$$

$$\overrightarrow{ME} = \langle 8-5, 3+3, 7-1 \rangle = \langle 3, 6, 6 \rangle$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ME} = (-4)(3) + (4)(6) + (-2)(6) = -12 + 24 - 12 = 0$$

بما ان $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ME} = 0$ فان $\overrightarrow{ME} \perp \overrightarrow{MA}$ ((متعامدان)) وعليه $m\angle AME = 90^\circ$



3) $\overrightarrow{DE} = \langle 8-1, 3+5, 7-5 \rangle = \langle 7, 8, 2 \rangle$

$$\overrightarrow{DB} = \langle 9-1, -1+5, -3-5 \rangle = \langle 8, 4, -8 \rangle$$

$$|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{49+64+4} = \sqrt{117}, \quad |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{64+16+64} = 12$$

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB} = (7)(8) + (8)(4) + (2)(-8) = 56 + 32 - 16 = 72$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{72}{12\sqrt{117}}\right) \simeq 56.3^\circ$$

4) حجم الهرم يساوي ثلث مساحة القاعدة في ارتفاعه

القاعدة مربع ومساحة المربع هو مربع طول ضلعه

$$AB = \sqrt{(9-1)^2 + (-1-1)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{64+4+4} = \sqrt{72}$$

ارتفاع الهرم هو طول العمود المرسوم من الراس E الى قاعدته وهو

EM : حيث M هي نقطة منتصف احد قطري القاعدة المربعة

$$EM = \sqrt{(5-8)^2 + (-3-3)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{9+36+36} = 9$$

$$\text{Area} = \frac{1}{3} \underbrace{(\sqrt{72})^2}_{\text{مساحة المربع}} (9) = (3)(72) = 216$$

راقت صافي

اتدرب واحل المسائل

جد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي :-

1) $\vec{u} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$ ، $\vec{v} = 7\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$

2) $\vec{u} = 4\hat{i} - 8\hat{j} - 3\hat{k}$ ، $\vec{v} = 12\hat{i} + -9\hat{j} - 8\hat{k}$

3) $\vec{u} = \langle -5, 9, 17 \rangle$ ، $\vec{v} = \langle 4, 6, -2 \rangle$

4) $\vec{u} = \langle 1, -4, 12 \rangle$ ، $\vec{v} = \langle 3, 10, -5 \rangle$

الحل :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (5)(7) + (-4)(6) + (3)(-2) = 35 - 24 - 6 = -5$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (4)(12) + (-8)(9) + (-3)(-8) = 48 - 72 + 24 = 0$

3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-5)(4) + (9)(6) + (17)(-2) = -20 + 54 - 34 = 0$

4) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1)(3) + (-4)(10) + (12)(-5) = 3 - 40 - 60 = -97$

جد قياس الزاوية θ بين المتجهين لأقرب عشر درجة

5) $\vec{m} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ ، $\vec{n} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

الحل :

$\vec{m} \cdot \vec{n} = (4)(3) + (-2)(4) + (5)(-2)$

$= 12 - 8 - 10 = -6$

$|\vec{m}| = \sqrt{16 + 4 + 25} = \sqrt{45}$

$|\vec{n}| = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{29}\sqrt{45}}\right)$

$\theta \simeq 99.6^\circ$

6) $\vec{v} = \langle 3, -2, 9 \rangle$ ، $\vec{w} = \langle 5, 3, -4 \rangle$

الحل :

$\vec{v} \cdot \vec{w} = (3)(5) + (-2)(3) + (9)(-4)$

$= 15 - 6 - 36 = -27$

$|\vec{v}| = \sqrt{9 + 4 + 81} = \sqrt{94}$

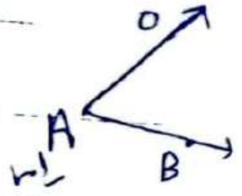
$|\vec{w}| = \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-27}{\sqrt{94}\sqrt{50}}\right)$

$\theta \simeq 113.2^\circ$

م/ رافت صابوني

7) اذا كانت $A(3,5,-4)$ و $B(7,4,-3)$ و O نقطة الأصل جد $m\angle OAB$ الى أقرب درجة



الحل:

$$\overrightarrow{AO} = \langle 0-3, 0-5, 0+4 \rangle$$
$$= \langle -3, -5, 4 \rangle$$
$$\overrightarrow{AB} = \langle 7-3, 4-5, -3+4 \rangle$$
$$= \langle 4, -1, 1 \rangle$$
$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = (-3)(4) + (-5)(-1) + (4)(1)$$
$$= -12 + 5 + 4 = -3$$
$$|\overrightarrow{AO}| = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{50}\sqrt{18}}\right) \simeq 96^\circ$$

---

8) يمر المستقيم l_1 بالنقطتين $(2,-1,4)$ و $(-3,5,7)$ ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين $(1,2,-1)$ و $(6,-5,3)$ جد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_2 والمستقيم l_1 الى أقرب جزء من عشرة

الحل:

اتجاه المستقيم l_1 هو: $\vec{v} = \langle -3-2, 5+1, 7-4 \rangle = \langle -5, 6, 3 \rangle$

اتجاه المستقيم l_2 هو: $\vec{w} = \langle 1-6, 2+5, -1-3 \rangle = \langle -5, 7, -4 \rangle$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (-5)(-5) + (6)(7) + (3)(-4) = 25 + 42 - 12 = 55$$ (حادة)

$$|\vec{v}| = \sqrt{25+36+9} = \sqrt{70}, \ |\vec{w}| = \sqrt{25+49+16} = \sqrt{90}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{55}{\sqrt{70}\sqrt{90}}\right) \simeq 46.1^\circ$$

رافت صابح

9) اذا كان المستقيم الذي له المعادلة المتجهة :

$\vec{r} = <1,4,-5> + \lambda<-6, g+5, 3>$ والمستقيم الذي له المعادلة

المتجهة $\vec{r} = <1,4,-5> + \mu<5, g-6, -4>$ متعامدين ، فما القيم الممكنة للثابت g

الحل :

اتجاه المستقيم الاول : $<-6, g+5, 3>$

اتجاه المستقيم الثاني : $<5, g-6, -4>$

المستقيمان متعامدان ، فاتجاهاهما متعامدان وعليه $\vec{V}\cdot\vec{U} = 0$

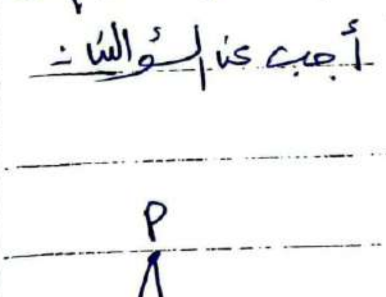
$$(-6)(5) + (g+5)(g-6) + (3)(-4) = 0$$
$$-30 + g^2 - 6g + 5g - 30 - 12 = 0$$
$$g^2 - g - 72 = 0$$
$$(g-9)(g+8) = 0$$
$$g = 9 , g = -8$$

اذا كانت $\vec{r} = 2\hat{j} - 3\hat{k} + t(-\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k})$ معادلة متجهة المستقيم l

والنقطة $P(-2, 22, 5)$ غير واقعة على المستقيم l أجب عن السؤالين :

10) جد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l

11) جد البعد بين النقطة P والمستقيم l



الحل :

10) نجهز $\vec{PA} = \vec{OA} - \vec{OP}$

$\vec{OP} = <-2, 22, 5>$

$\vec{OA} = <-t, 2+2t, -3+5t>$

$\vec{PA} = <-t, 2+2t, -3+5t> - <-2, 22, 5>$

$\vec{PA} = <-t+2, -20+2t, -8+5t>$

بما أن $\vec{PA} \perp l$ فإن : $\vec{AP}\cdot<-1,2,5> = 0$

$\langle -t+2, -20+2t, -8+5t \rangle \cdot \langle -1, 2, 5 \rangle = 0$

$(t-2) + (-40+4t) + (-40+25t) = 0$

$30t - 82 = 0 \rightarrow 30t = 82 \rightarrow t = \frac{82}{30} = \frac{41}{15}$

$\overrightarrow{OA} = \langle \frac{-41}{15}, 2 + \frac{82}{15}, -3 + \frac{205}{15} \rangle = \langle \frac{-41}{15}, \frac{112}{15}, \frac{32}{3} \rangle$

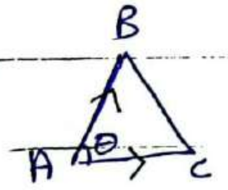
وعليه مسقط العمود من P على المستقيم l هو $\left(\frac{-41}{15}, \frac{112}{15}, \frac{32}{3}\right)$

11) البعد هو طول القطعة المستقيمة من P إلى A

$\overrightarrow{AP} = \langle -2 + \frac{41}{15}, 22 - \frac{112}{5}, 5 - \frac{32}{3} \rangle$

$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(-2+\frac{41}{15})^2 + (22 - \frac{112}{5})^2 + (5 - \frac{32}{3})^2} \cong 15.6$

12) جد مساحة المثلث ABC حيث $\overrightarrow{AC} = \langle 9, 1, 4 \rangle$, $\overrightarrow{AB} = \langle 4, 9, 1 \rangle$



الحل :- نجد الزاوية θ

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (9)(4) + (1)(9) + (4)(1) = 36 + 9 + 4 = 49$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{81 + 1 + 16} = \sqrt{98}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 81 + 1} = \sqrt{98}$

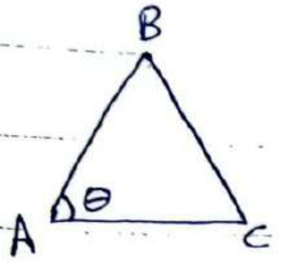
$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{49}{\sqrt{98}\sqrt{98}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$

$Area = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin\theta$

$= \frac{1}{2} (\sqrt{98})(\sqrt{98}) \sin 60^\circ = \frac{49\sqrt{3}}{2}$

13) جد مساحة المثلث ABC الذي احداثيات رؤوسه هي

$A(1,3,1)$ و $B(2,7,-3)$ و $C(4,-5,2)$



الحل:- نجد الزاوية θ

$$\overrightarrow{AB} = \langle 2-1, 7-3, -3-1 \rangle = \langle 1, 4, -4 \rangle$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle 4-1, -5-3, 2-1 \rangle = \langle 3, -8, 1 \rangle$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (1)(3) + (4)(-8) + (-4)(1)$$
$$= 3 - 32 - 4 = -33$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+16+16} = \sqrt{33}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9+64+1} = \sqrt{74}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-33}{\sqrt{33}\sqrt{74}}\right) \simeq 131.2^\circ$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{33}\sqrt{74}\sin 131.2$$
$$\simeq 18.6$$

ملاحظة: نستطيع ايجاد $\sin\theta$ من $\cos\theta$ من المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

---

(14) يمثل المتجه $\vec{F} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ القوة التي يولدها جرار ناقل لتحريك حقيبة في مسار مستقيم من النقطة $(1,1,1)$ الى النقطة $(9,4,7)$ جد مقدار الشغل الذي تبذله القوة F، علماً بأن القوة بالنيوتن N والمسافة بالمتر m ومقدار الشغل W المبذول بوحدة الجول (J) يساوي ناتج الضرب القياسي لمتجه القوة في متجه الازاحة أي:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

الحل:

$$\vec{d} = \langle 9-1, 4-1, 7-1 \rangle = \langle 8, 3, 6 \rangle$$

$$\vec{F} = \langle 5, -3, 1 \rangle$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = (8)(5) + (3)(-3) + (6)(1) = 40 - 9 + 6$$
$$= 37$$

هنا d الازاحة

راقت صافي

15) اذا كانت النقطة $R(27,-17,-1)$ والنقطة $S(11,-9,11)$
تقعان على المستقيم l وكانت النقطة Q تقع على المستقيم l
حيث $\overrightarrow{OQ}$ عمودي على l ، جد صيغة متجه الموقع للنقطة Q

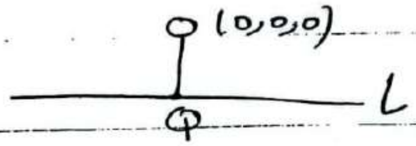
الحل :

نجد معادلة المستقيم l

$$\vec{V} = \langle 27-11, -17+9, -1-11 \rangle = \langle 16, -8, -12 \rangle$$
$$= \langle 4, -2, -3 \rangle$$
$$\vec{r} = \langle 11, -9, 11 \rangle + t \langle 4, -2, -3 \rangle$$

النقطة Q هي المسقط العمودي
على هذا المستقيم فيكون متجه
موقعها $\overrightarrow{OQ}$ هو

$$\overrightarrow{OQ} = \langle 11+4t, -9-2t, 11-3t \rangle$$
حيث Q تحقق معادلة المستقيم



$$\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{V} = 0$$
$$\langle 11+4t, -9-2t, 11-3t \rangle \cdot \langle 4, -2, -3 \rangle = 0$$
$$4(11+4t) + -2(-9-2t) + -3(11-3t) = 0$$
$$44 + 16t + 18 + 4t - 33 + 9t = 0$$
$$29t = 29 \rightarrow t = 1$$
$$\overrightarrow{OQ} = \langle 11+4, -9+2, 11+3 \rangle = \langle 7, -7, 14 \rangle$$

اذا كانت متجهات مواقع النقاط : A و B و D هي $\begin{pmatrix} 2 \\ -29 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ 22 \end{pmatrix}$
على الترتيب . اجب عن الاسئلة الاربعة الآتية تباعاً :

16) اثبت ان $\overline{AB} \perp \overline{AD}$

17) جد متجه موقع النقطة C اذا كان ABCD مستطيلاً

18) جد مساحة المستطيل ABCD

19) جد متجه موقع مركز المستطيل ABCD

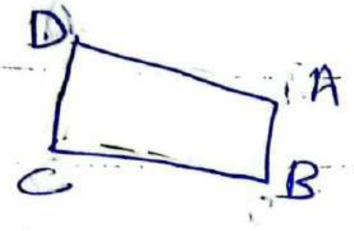
رأفت صابح

الحل: $A\langle -4, 13, 22\rangle$, $B\langle 4, 17, 14\rangle$, $D\langle 2, -29, 7\rangle$

16)

$$\overrightarrow{AB} = \langle 4+4, 17-13, 14-22\rangle = \langle 8, 4, -8\rangle$$
$$\overrightarrow{AD} = \langle 2+4, -29-13, 7-22\rangle = \langle 6, -42, -15\rangle$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = (8)(6) + (4)(-42) + (-8)(-15)$$
$$= 48 - 168 + 120 = 0$$

17) عندما نرسم شكل تقريبي المهم هو ترتيب رؤوس المستطيل حسب عقارب الساعة او عكس عقارب الساعة



المطلوب $\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ∵ مستطيل

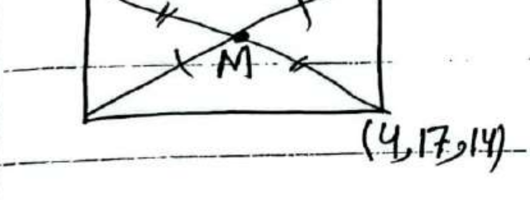
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$
$$\langle 6, -42, -15\rangle = \overrightarrow{OC} - \langle 4, 17, 14\rangle$$
$$\overrightarrow{OC} = \langle 6, -42, -15\rangle + \langle 4, 17, 14\rangle = \langle 10, -25, -1\rangle$$

!! يوجد اكثر من طريقة للحل !! يمكن تطبيق التوازي

18) مساحة المستطيل هو الطول مضروب بالعرض

$$Area = |\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AD}| = \left(\sqrt{64+16+64}\right)\left(\sqrt{36+1764+225}\right)$$
$$= (12)(45) = 540$$

19) قطرا المستطيل ينصف كل منهما الآخر

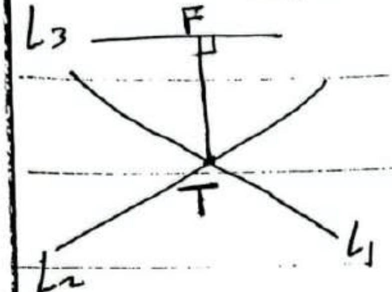


$$M = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{17-29}{2}, \frac{14+7}{2}\right)$$
$$M = \left(3, -6, \frac{21}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{OM} = \left\langle 3, -6, \frac{21}{2}\right\rangle$$

رأفت صافي

تمثل :- $\vec{r} = \langle -5, 7, 1\rangle + t\langle 3, 1, 4\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وتمثل
$\vec{r} = \langle 2, 8, -1\rangle + u\langle 2, 0, -3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 وتمثل
$\vec{r} = \langle 3, 19, 10\rangle + v\langle -1, 3, 1\rangle$ معادلة متجهة المستقيم l_3 :-

اذا تقاطع المستقيم l_2 والمستقيم l_1 في النقطة T وكانت النقطة F تقع على المستقيم l_3 حيث $\overrightarrow{TF} \perp l_3$ أجب عما يلي :-



(20) جد احداثيات النقطة F
(21) جد البعد بين النقطة T والمستقيم l_3

الحل :-

نجد T وهي نقطة تقاطع l_2 و l_1 وعليه نساوي $\vec{r}$ في كلا المعادلتين

$\langle -5+3t, 7+t, 1+4t\rangle = \langle 2+2u, 8, -1-3u\rangle$

نشكل معادلات :-

$-5+3t = 2+2u$ — (1)
$7+t = 8 \rightarrow t=1$ — (2)
$1+4t = -1-3u$ — (3)

نعوض $t=1$ في معادلة (1) :-
$-5+3 = 2+2u \rightarrow u=-2$
نعوض في معادلة (3) :- $1+4 = -1+6$ ✓
وعليه المستقيمان متقاطعان
نقطة تقاطع
$T(-5+3, 7+1, 1+4)$
$T(-2, 8, 5)$

ملاحظة السؤال هو عدم اعطاء النقطة الخارجة عن المستقيم

نتبع نفس اسلوب المسقط !!

F هي مسقط عمودي للنقطة T على المستقيم l_3

احداثيات F $(3-v, 19+3v, 10+v)$ لانها تقع على المستقيم وتحقق معادلته

$\overrightarrow{TF} = \langle 3-v+2, 19+3v-8, 10+v-5\rangle$
$\overrightarrow{TF} = \langle 5-v, 11+3v, 5+v\rangle$

$\overrightarrow{TF} \perp l_3 \rightarrow \overrightarrow{TF} \perp \langle -1, 3, 1\rangle$
$(5-v)(-1) + (11+3v)(3) + (5+v)(1) = 0$

$\boxed{v = -3}$

احداثيات F هو :-
$(3+3, 19-9, 10-3)$
$(6, 10, 7)$

رافت ضاحي

21) المطلوب هو القطعة المستقيمة TF

$TF = \sqrt{(6+2)^2+(10-8)^2+(7-5)^2} = \sqrt{64+4+4} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

اذا كانت $\vec{r} = \langle 5,3,0\rangle + \lambda\langle -1,3,1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l

وكانت $A(3,-2,1)$ و $B(5,3,0)$ أجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

22) جد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم $\overrightarrow{AB}$ والمستقيم l

23) تقع النقطة C على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ حيث $AB = AC$ جد احداثيات C

الحل :

$\overrightarrow{AB} = \langle 5-3, 3+2, 0-1\rangle = \langle 2,5,-1\rangle$

اتجاه المستقيم l هو $\vec{V} = \langle -1,3,1\rangle$

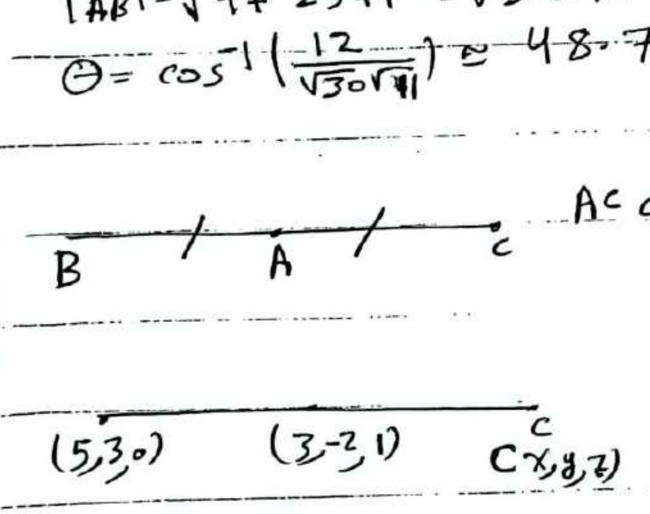
22)

$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{V} = (2)(-1)+(5)(3)+(-1)(1) = -2+15-1 = 12$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$, $|\vec{V}| = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{30}\sqrt{11}}\right) \approx 48.7^\circ$

23) بما أن $AB = AC$ لذا A منتصف AC



$\left(\frac{5+x}{2}, \frac{3+y}{2}, \frac{z}{2}\right) = (3,-2,1)$

بالمقارنة :

$\frac{5+x}{2} = 3 \rightarrow x = 1$

$\frac{3+y}{2} = -2 \rightarrow y = -7$

$\frac{z}{2} = 1 \rightarrow z = 2$

احداثيات C هو $(1,-7,2)$

راقت صباحي

تقع النقطة $A(-7,-4,9)$ والنقطة $B(8,5,3)$ على المستقيم l_1
وتقع النقطة $C(6,11,7)$ على المستقيم l_2 الذي معادلته

$$\vec{r}=\langle 6,11,7\rangle+t\langle -1,3,2\rangle$$

(24) بيّن ان النقطة B تقع على المستقيم l_2

(25) بيّن ان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متعامدان

(26) جد $m\angle ABC$

(27) جد مساحة المثلث ABC

الحل:

(24) نعوض بدل $\vec{r}$

$$\langle 8,5,3\rangle=\langle 6-t,11+3t,7+2t\rangle$$

$6-t=8 \to t=-2$

$11+3t=5 \to t=-2$

$7+2t=3 \to t=-2$

نفس القيمة

بما ان لهذه المعادلات الحل نفسه 6 ولهذه النقطة B تقع على المستقيم l_2

(25) اتجاه l_1 هو

$$\overrightarrow{AB}=\langle 8+7,5+4,3-9\rangle$$
$$=\langle 15,9,-6\rangle$$
$$=\langle 5,3,-2\rangle$$

نبسط

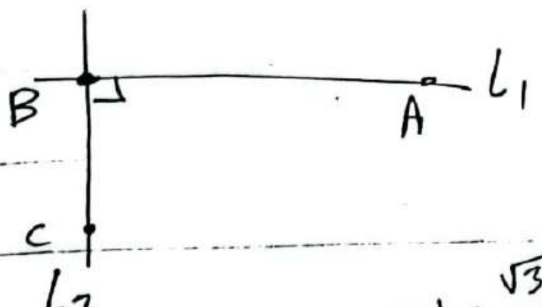
اتجاه l_2 هو $\vec{v}=\langle -1,3,2\rangle$

لاثبات ان l_1 و l_2 متعامدان نستخدم الضرب القياسي

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=(5)(-1)+(3)(3)+(-2)(2)=-5+9-4=0$$

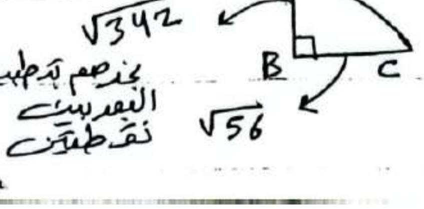
بما ان $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=0$ فانهما متعامدان

(26)



$$m\angle ABC=90^\circ$$

(27)



$$Area=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{342}\sqrt{56}$$
$$\approx 69.2$$

مراقف ضاحي

21

ABCD هرم ثلاثي ، إذا كانت إحداثيات رؤوسه هي

$A(4,3,-1)$, $B(-4,5,2)$, $C(6,-1,0)$, $D(10,11,19)$

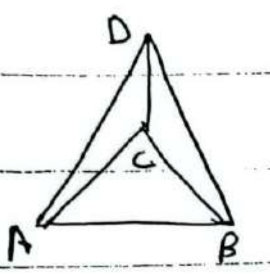
أجب عن الأسئلة الآتية :

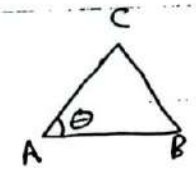
(28) جد مساحة المثلث ABC في صورة $a\sqrt{6}$

(29) أثبت أن $m\angle AED = 90^\circ$ حيث $E(1,2,1)$

(30) إذا كانت النقطة E تقع في المستوى نفسه الذي تقع فيه المثلث ABC

جد حجم الهرم ABCD .





الحل:

$\vec{AB} = \langle -4-4, 5-3, 2+1 \rangle$
$= \langle -8, 2, 3 \rangle$

$\vec{AC} = \langle 6-4, -1-3, 0+1 \rangle = \langle 2, -4, 1 \rangle$

(28

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -16 + -8 + 3 = -21$

$|\vec{AB}| = \sqrt{64+4+9} = \sqrt{77}$

$|\vec{AC}| = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-21}{\sqrt{77}\sqrt{21}}\right) \simeq 121.5^\circ$

مساحة المثلث $Area = \frac{1}{2}|AB||AC|\sin\theta$

$= \frac{1}{2}\sqrt{77}\sqrt{21}\sin 121.5$

$\simeq 17.14 \simeq 7\sqrt{6}$

لكن السؤال طالب في صورة $a\sqrt{6}$

نقصد طريقة مختلفة لنعود إلى السؤال وهو إيجاد $\sin\theta$ دون إيجاد قيمة الزاوية θ

نبسط أولاً

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-21}{\sqrt{77}\sqrt{21}}\right) \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{21}}{\sqrt{77}}\right)$

$\theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{21}{77}} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right)$

ناخذ cos للطرفين ،

$\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$

متطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{3}{11}} = \sqrt{\frac{8}{11}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{77}\sqrt{21}\,\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = 7\sqrt{6}$

رأفت صباحي

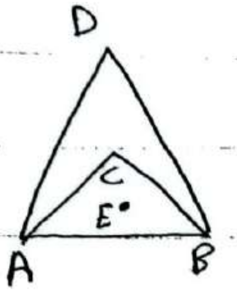
29) نفكر بالضرب القياسي

$\overrightarrow{EA} = \langle 4-1, 3-2, -1-1 \rangle = \langle 3, 1, -2 \rangle$

$\overrightarrow{ED} = \langle 10-1, 11-2, 19-1 \rangle = \langle 9, 9, 18 \rangle$

$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{ED} = 27 + 9 - 36 = 0$

وعليه $\overrightarrow{EA} \perp \overrightarrow{ED}$ وعليه $m\angle AED = 90^\circ$



30) ارتفاع الهرم $|\overrightarrow{ED}| = \sqrt{81 + 81 + 324}$
$= \sqrt{486}$

مساحة قاعدة المثلث هنا
نفسها مساحة المثلث ABC

وعليه $V = \left(\frac{1}{3}\right)(7\sqrt{6})(\sqrt{486})$
126

اذا كانت $A(3, 1, -6)$ و $B(5, -2, 0)$ و $C(8, -4, -6)$

اجب عن الاسئلة الآتية:

31) بيّن ان $\overrightarrow{AC} = n\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ حيث n عدد صحيح

32) بيّن ان قياس الزاوية ACB هو $\cos^{-1} \frac{5\sqrt{2}}{14}$

33) اكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$

34) اذا كانت $D(6, -1, p)$ وعلم ان $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BD}$ متقاطعان
جد قيمة p

35) بيّن ان الشكل ABCD معين ثم جد طول كل ضلع
من اضلاعه.

الحل:

$\overrightarrow{AC} = \langle 8-3, -4-1, -6+6 \rangle = \langle 5, -5, 0 \rangle$

31) $= 5\langle 1, -1, 0 \rangle$

$\overrightarrow{AC} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

هنا $n = 5$

32)

$$\overrightarrow{CA} = \langle 3-8, 1+4, -6+6 \rangle = \langle -5, 5, 0 \rangle$$

$$\overrightarrow{CB} = \langle 5-8, -2+4, 0+6 \rangle = \langle -3, 2, 6 \rangle$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15 + 10 + 0 = 25$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{9+4+36} = 7$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|}\right) = \cos^{-1} \frac{25}{(5\sqrt{2})(7)} = \cos^{-1} \frac{5}{7\sqrt{2}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{7\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1} \frac{5\sqrt{2}}{14}$$

---

33) المتجه الموازي

$$\overrightarrow{AC} = \langle 5, -5, 0 \rangle$$

بسط

$$= \langle 1, -1, 0 \rangle$$

نكتب المعادلة:

$$\vec{r} = \langle 8, -4, -6 \rangle + t\langle 1, -1, 0 \rangle$$

---

34) نكتب معادلة $\overrightarrow{BD}$

$$\overrightarrow{BD} = \langle 6-5, -1+2, p \rangle = \langle 1, 1, p \rangle$$

$$\vec{r} = \langle 5, -2, 0 \rangle + u\langle 1, 1, p \rangle$$

المستقيمان متقاطعان:
نساوي $\vec{r}$ معاً

$$\langle 8+t, -4-t, -6 \rangle = \langle 5+u, -2+u, up \rangle$$

$8+t = 5+u$ —— (1)

$-4-t = -2+u$ —— (2)

$-6 = up$ —— (3)

بحل المعادلتين (1) و (2)

ينتج $t = \frac{5}{2}, u = \frac{1}{2}$

نعوض في معادلة (3)

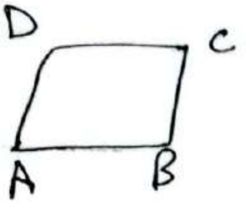
$$-6 = \frac{1}{2} p$$

$$\boxed{p = -12}$$

وعليه احداثي D هو $(6, -1, -12)$

رأفت صافي

35) المعين هو متوازي اضلاع جميع اضلاعه متساوية



لاثبات ان الشكل معينا :-

1) نثبت انه متوازي اضلاع

2) يوجد ضلعان متجاوران متساويان بالقياس

$\overrightarrow{AB} = \langle 5-3, -2-1, 0+6 \rangle = \langle 2, -3, 6 \rangle \longrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{DC} = \langle 8-6, -4+1, -6+12 \rangle = \langle 2, -3, 6 \rangle$

$\overrightarrow{BC} = \langle 8-5, -4+2, -6-0 \rangle = \langle 3, -2, -6 \rangle \longrightarrow \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD} = \langle 6-3, -1-1, -12+6 \rangle = \langle 3, -2, -6 \rangle$

وعليه الشكل متوازي اضلاع

$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+9+36} = 7$

نجد طول ضلعان غير متقابلان

$AD = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{9+4+36} = 7$

وعليه الشكل معينا لانه متوازي اضلاع وفيه ضلعان متجاوران متطابقان

---

36) اطلق صاروخ من النقطة (1,2,1)، ثم وصل بعد ثانيتين الى النقطة (9,13,21) وفي الوقت نفسه، اطلق صاروخ آخر من النقطة (4,-3,2) ووصل بعد ثانيتين الى النقطة (14,1,18) ما قياس الزاوية بين مساري الصاروخين

الحل :

اتجاه مسار الصاروخ الاول

اتجاه مسار الصاروخ الثاني

$\vec{v} = \langle 9-1, 13-2, 21-1 \rangle = \langle 8, 11, 20 \rangle$

$\vec{u} = \langle 14-4, 1+3, 18-2 \rangle = \langle 10, 4, 16 \rangle$

$\vec{v} \cdot \vec{u} = 80 + 44 + 320 = 444$

$|\vec{v}| = \sqrt{64+121+400} = \sqrt{585}$

$|\vec{u}| = \sqrt{100+16+256} = \sqrt{372}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{444}{\sqrt{585}\,\sqrt{372}}\right)$

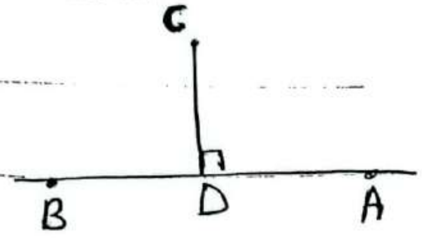
$\theta \simeq 17.9^\circ$

رافت صابحي

37) اذا كانت $A(3,-2,4)$ و $B(1,-5,9)$ و $C(-4,5,-1)$

وكانت النقطة D تقع على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B

وكانت الزاوية CDA قائمة ، جد احداثيات النقطة D



الحل :-

النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$

نجد معادلة المستقيم المار بـ A و B

$$\overrightarrow{AB} = \langle 1-3, -5+2, 9-4 \rangle = \langle -2, -3, 5 \rangle$$

$$\vec{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + t\langle -2, -3, 5 \rangle$$

احداثيات D هي $(3-2t, -2-3t, 4+5t)$ لانها تقع على المستقيم

$$\overrightarrow{CD} = \langle 3-2t+4, -2-3t-5, 4+5t+1 \rangle$$

$$\overrightarrow{CD} = \langle 7-2t, -7-3t, 5+5t \rangle$$

$$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\langle 7-2t, -7-3t, 5+5t \rangle \cdot \langle -2, -3, 5 \rangle = 0$$

$$-2(7-2t) + -3(-7-3t) + 5(5+5t) = 0$$

نفك الاقواس وحل المعادلة ينتج $t = \frac{-16}{19}$

وعليه احداثيات D

$$\left(3-2\left(\frac{-16}{19}\right), -2-3\left(\frac{-16}{19}\right), 5+5\left(\frac{-16}{19}\right)\right)$$

$$\left(\frac{89}{19}, \frac{10}{19}, \frac{-4}{19}\right)$$

اذا كانت $\vec{r}=\begin{pmatrix}-8\\16\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}7\\-3\\-6\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1

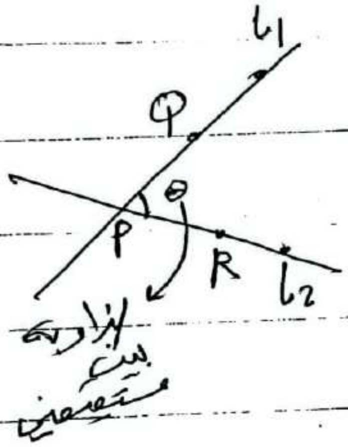
وكانت $\vec{r}=\begin{pmatrix}-10\\31\\-26\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}3\\-6\\7\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2

ويتقاطع هذان المستقيمان في النقطة P وكانت النقطة Q تقع على المستقيم l_1 حيث $t=3$ والنقطة R تقع على المستقيم l_2 حيث $u>3$ و $PQ=PR$ اجب عن السؤالين :

38) اذا كان $m\angle RPQ=\theta$ بيّن أن $\cos\theta=\frac{-3}{94}$

39) بيّن ان مساحة المثلث PQR هي $2\sqrt{8827}$

الحل :



38) اتجاه l_1 ← $\vec{V_1}=\begin{pmatrix}7\\-3\\-6\end{pmatrix}$

اتجاه l_2 ← $\vec{V_2}=\begin{pmatrix}3\\-6\\7\end{pmatrix}$

$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=21+18-42=-3$

$|\vec{V_1}|=\sqrt{49+9+36}=\sqrt{94}$

$|\vec{V_2}|=\sqrt{9+36+49}=\sqrt{94}$

$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{94}\sqrt{94}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-3}{94}\right)$

ناخذ cos للطرفين $\cos\theta=\frac{-3}{94}$

39) هنا نحتاج معرفة $\underbrace{|\vec{PQ}| \text{ و } |\vec{PR}|}_{\text{متساويات}}$ بجذر واحد فهم

نجد النقطة Q وهي تقع على l_1 عند $t=3$

$$Q=\begin{pmatrix}-8+7(3)\\16+-3(3)\\1+-6(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\7\\-17\end{pmatrix}$$

P هي نقطة تقاطع المستقيمين هنا نساوي $\vec{r_1}$

$\langle -8+7t, 16-3t, 1-6t\rangle = \langle -10+3u, 31-6u, -26+7u\rangle$

$-8+7t = -10+3u$ — ①

$16-3t = 31-6u$ — ②

$1-6t = -26+7u$ — ③

بحل معادلة ① مع ② ينتج

$t = 1 \quad , \quad u = 3$

نعوض في معادلة ③ :

$1-6t = -26+7u$

$1-6 = -26+21$ ✓

نعوض $t=1$ لنعرف P ←

$P(-8+7, 16-3, 1-6) = (-1, 13, -5)$

$\overrightarrow{PQ} = \langle 13+1, 7-13, -17+5\rangle = \langle 14, -6, -12\rangle$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{196+36+144} = \sqrt{376}$

نحتاج الى $\sin\theta$ حيث نجدها كما يلي :

$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(\frac{-3}{94}\right)^2$

$= \frac{\sqrt{8827}}{94}$

$Area = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|\sin\theta$

$= \frac{1}{2}\sqrt{376}\,\sqrt{376}\,\frac{\sqrt{8827}}{94}$

$= 2\sqrt{8827}$

رافت ضاحي ٠٥٠٠٤١٠٥٦٠

رسم متوازي المستطيلات الآتي باستعمال برمجية حاسوبية تعتمد في قياساتها على المتجهات، فكانت كالآتي :-

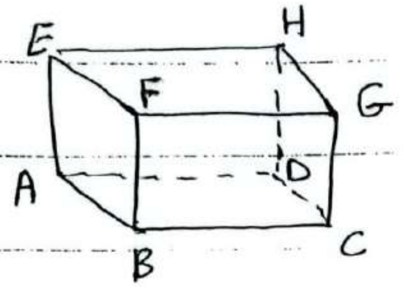
$\overrightarrow{AB} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k})$ ، $\overrightarrow{AD} = (-10\hat{i} + 10\hat{j} - 5\hat{k})$ ، $\overrightarrow{AE} = (-6\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$

(40) اذا كانت $B(8, 3, -2)$ جد احداثيات النقطة H

(41) جد قياس الزاوية GAC مقرباً الى أقرب عشر درجة

(42) اذا كان X نقطة منتصف الضلع $\overline{EF}$

جد جيب تمام الزاوية DXC

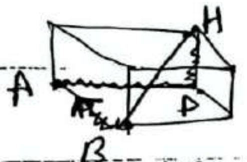


الحل :-

بما أنه متوازي مستطيلات، فان كل ضلعان متقابلان متوازيان

نفرض ان النقطة $H(x, y, z)$

(40)



نتحرك من B إلى نصل H

$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}$ نفسه $\overrightarrow{AE}$

$\langle x-8, y-3, z+2 \rangle = \langle -2, -4, -4 \rangle + \langle -10, 10, -5 \rangle + \langle -6, -3, 6 \rangle$

$\langle x-8, y-3, z+2 \rangle = \langle -18, 3, -3 \rangle$

$x - 8 = -18 \rightarrow x = -10$

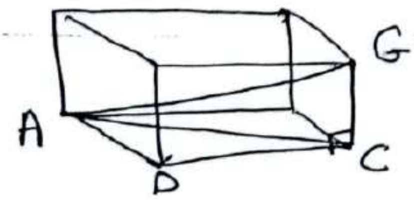
$y - 3 = 3 \rightarrow y = 6$

$z + 2 = -3 \rightarrow z = -5$

احداثي النقطة $H(-10, 6, -5)$

راقت صافي

(41)



المثلث ACG قائم الزاوية

$$\tan\theta = \frac{|CG|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|}$$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{BC}}_{AD}$

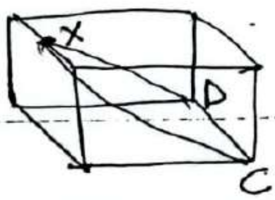
$$= \frac{|\langle -6,-3,6\rangle|}{|\langle 2,4,4\rangle + \langle -10,10,-5\rangle|}$$

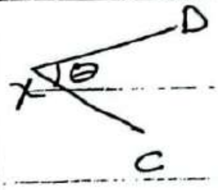
$$= \frac{|\langle -6,-3,6\rangle|}{|\langle -8,14,-1\rangle|} = \frac{\sqrt{36+9+36}}{\sqrt{64+196+1}}$$

$$\tan\theta = \frac{9}{\sqrt{261}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{29}} \simeq 29.1^\circ$$

(42)





$$\overrightarrow{XD} = \overrightarrow{XE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{1}{2}FE + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}$$

معكوس AB

$$= \frac{1}{2}\langle -2,-4,-4\rangle + \langle 6,3,-6\rangle + \langle -10,10,-5\rangle$$

$$= \langle -1,-2,-2\rangle + \langle 6,3,-6\rangle + \langle -10,10,-5\rangle$$

$$\overrightarrow{XD} = \langle -5, 11, -13\rangle$$

$$|\overrightarrow{XD}| = \sqrt{25+121+169} = \sqrt{315}$$

$$\overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{XC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{1}{2}\langle 2,4,4\rangle + \langle 6,3,-6\rangle + \langle -10,10,-5\rangle = \langle -3, 15, -9\rangle$$

$$|\overrightarrow{XC}| = \sqrt{9+225+81} = \sqrt{315}$$

$$\overrightarrow{XD}\cdot\overrightarrow{XD} = (-5)(-3) + 11(15) + (-13)(-9) = 297$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{297}{\sqrt{315}\sqrt{315}}\right) \rightarrow \cos\theta = \frac{297}{315} = \frac{33}{35}$$

رأفت صابحي

جد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي :

1) $\vec{u} = \langle 4, 5, -3 \rangle$, $\vec{v} = \langle -2, 3, -7 \rangle$

2) $\vec{e} = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

3) $\vec{m} = 7\hat{i} + 4\hat{j} - 9\hat{k}$, $\vec{n} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 10\hat{k}$

الحل :

1) $(4)(-2) + (5)(3) + (-3)(-7) = -8 + 15 + 21 = 28$

2) $\vec{e} \cdot \vec{f} = (-13)(-2) + (8)(3) + (-5)(10) = 26 + 24 - 50 = 0$

3) $\vec{m} \cdot \vec{n} = (7)(2) + (4)(-5) + (-9)(10) = 14 - 20 - 90 = -96$

4) اذا كان المتجه $\vec{v} = \langle 6, 5, a \rangle$ يعامد المتجه $\vec{w} = \langle 15, 24, -7 \rangle$ ، جد (a)

الحل :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$
$$(15)(6) + (24)(5) + (-7)(a) = 0$$
$$90 + 120 - 7a = 0$$
$$7a = 210 \longrightarrow a = \frac{210}{7} = 30$$

جد قياس الزاوية θ بين المتجهين الى اقرب عشر درجة

5)
$\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (5)(2) + (2)(-1) + (3)(-2)$$
$$= 10 - 2 - 6 = 2$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{25 + 4 + 9} = \sqrt{38}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) \simeq 83.8^\circ$$

6) $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1)(-1) + (1)(-1) + (-1)(4)$$
$$= -1 - 1 - 4 = -6$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{3\sqrt{2}\sqrt{3}}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{-6}{3\sqrt{6}}\right) \simeq 144.7^\circ$$

رافد ابراهيم صافي

7) اذا كان المتجه $\vec{a} = \lambda\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ والمتجه $\vec{b} = \lambda\hat{i} + 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$
متعامدين ، فما قيم λ

الحل :-

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\lambda^2 - 12 + 4\lambda = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0 \rightarrow (\lambda + 6)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda = -6 \text{ و } \lambda = 2$

---

8) اذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1

وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 جد قياس
الزاوية الحادة بين هذين المستقيمين الى أقرب عشر درجة .

الحل :- اتجاه l_1 : $\vec{v} = \langle 2, -6, 3 \rangle$
اتجاه l_2 : $\vec{w} = \langle 3, -4, 12 \rangle$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = (2)(3) + (-6)(-4) + (3)(12)$

$= 6 + 24 + 36$

$= 66$ "حادة"

$|\vec{v}| = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7$

$|\vec{w}| = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{66}{(7)(13)}\right) \simeq 43.5^\circ$

رأفت ابراهيم صباغ

(9) يمر المستقيم r_1 بالنقطتين $(3,-5,9)$ و $(-2,11,6)$ ويمر المستقيم r_2 بالنقطتين $(4,3,8)$ و $(-5,9,12)$ جد قياس الزاوية الحادة بين هذين المستقيمين الى أقرب عشر درجة

الحل :-

اتجاه r_1 :- $\vec{V} = \langle 3+2, -5-11, 9-6\rangle = \langle 5,-16,3\rangle$

اتجاه r_2 :- $\vec{W} = \langle 4+5, 3-9, 8-12\rangle = \langle 9,-6,-4\rangle$

$$\vec{V}\cdot\vec{W} = 45+96-12 = 129$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{25+256+9} = \sqrt{290} \quad , \quad |\vec{W}| = \sqrt{81+36+16} = \sqrt{133}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{129}{\sqrt{290}\sqrt{133}}\right) \simeq 48.9^\circ$$

---

(10) اذا كان قياس الزاوية بين المتجه $\langle v,0,-1\rangle$ والمتجه $\langle 2,-1,0\rangle$ هو 60° جد قيمة v

الحل :-

$$\vec{m} = \langle v,0,-1\rangle \quad , \quad \vec{n} = \langle 2,-1,0\rangle$$

$$\vec{m}\cdot\vec{n} = 2v$$

$$|\vec{m}| = \sqrt{v^2+1} \quad , \quad |\vec{n}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$$

تمارين

$$\cos 60^\circ = \frac{2v}{\sqrt{5}\sqrt{v^2+1}}$$

نضرب بـ (2) ثم نربع

$$\frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{v^2+1} = 2v$$

$$5(v^2+1) = 16v^2$$

$$16v^2 - 5v^2 = 5$$

لو كانت سالبة

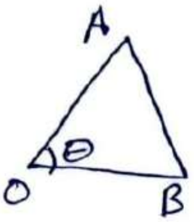
$$11v^2 = 5 \longrightarrow v^2 = \frac{5}{11} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{5}{11}} \quad , \quad -\sqrt{\frac{5}{11}}$$

مرفوضة لان الزاوية حادة

$\vec{m}\cdot\vec{n} = 2v$

رافد ابراهيم صافي

(11) اذا كان $A(3,-2,6)$ وكان $B(-5,4,1)$ جد مساحة المثلث AOB حيث O نقطة الاصل



الحل :-

$$\overrightarrow{OA} = \langle 3-0, -2-0, 6-0 \rangle = \langle 3, -2, 6 \rangle$$

$$\overrightarrow{OB} = \langle -5-0, 4-0, 1-0 \rangle = \langle -5, 4, 1 \rangle$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -15 - 8 + 6 = -17$$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{9+4+36} = 7$$

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{25+16+1} = \sqrt{42}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-17}{7\sqrt{42}}\right) \simeq 112^\circ$$

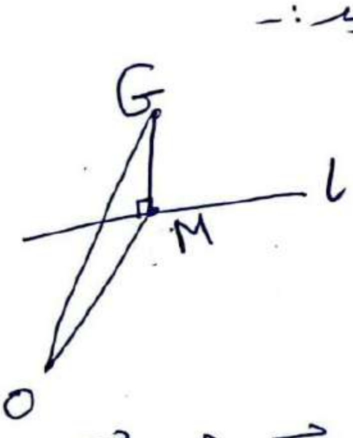
$$Area = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}(7)(\sqrt{42}) \sin 112 \simeq 21.03$$

اذا مر المستقيم l بالنقطتين $E(-3,7,12)$ و $F(1,-3,5)$ وكانت النقطة $G(0,-6,4)$ لا تقع على المستقيم l فجد :-

(12) مسقط العمود من النقطة G على المستقيم l

(13) البعد بين النقطة G والمستقيم l.



$$\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG}$$

الحل :-

نجد معادلة المستقيم l

اتجاه المستقيم

$$\overrightarrow{EF} = \langle 1+3, -3-7, 5-12 \rangle$$

$$\overrightarrow{EF} = \langle 4, -10, -7 \rangle$$

$$\vec{r} = \langle 1, -3, 5 \rangle + t\langle 4, -10, -7 \rangle$$

بما ان M تقع على المستقيم l فان

$$\overrightarrow{OM} = \langle 1+4t, -3-10t, 5-7t \rangle$$

$$\overrightarrow{OG} = \langle 0, -6, 4 \rangle$$

$$\overrightarrow{GM} = \langle 1+4t, 3-10t, 1-7t \rangle$$

رافت ابراهيم صافي

بما أن $GM \perp l$ فان $\overrightarrow{GM} \perp \overrightarrow{EF}$ وعليه

$$\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$$

$$(1+4t)(4) + (3-10t)(-10) + (-7)(1-7t) = 0$$

بحل المعادلة $t = \frac{33}{165}$

نعوض $t = \frac{33}{165}$ ← $M\left(1+4\left(\frac{33}{165}\right), -3-10\left(\frac{33}{165}\right), 5-7\left(\frac{33}{165}\right)\right)$

$$M(1.8, -5, 3.6)$$

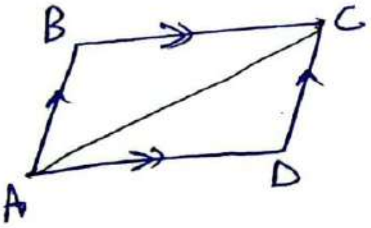
البعد بين G والمستقيم l

$$GM = \sqrt{(1.8-0)^2 + (-5+6)^2 + (3.6-4)^2}$$

$$GM \simeq 2.1$$

---

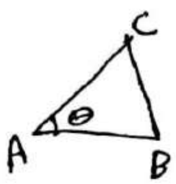
(14) يبين الشكل المجاور متوازي اضلاع $ABCD$ حيث $\overrightarrow{AB} = 6\hat{i} - 2\hat{j} + 11\hat{k}$ ، $\overrightarrow{AC} = 15\hat{i} + 8\hat{j} + 5\hat{k}$ جد مساحة متوازي الاضلاع $ABCD$



الحل:

قطر متوازي الاضلاع يقسم متوازي الاضلاع الى مثلثين متطابقين

وعليه اجد مساحة المثلث BAC



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (15)(6) + (8)(-2) + (5)(11) = 129$$

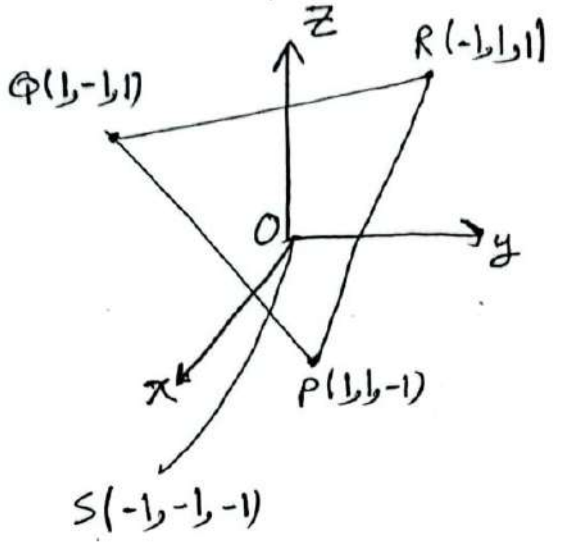
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36+4+121} = \sqrt{161}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{225+64+25} = \sqrt{314}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{129}{\sqrt{161}\sqrt{314}}\right) \simeq 55°$$

نضرب مساحة المثلث في (2) ← $\text{Area} = \left(\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\sin\theta\right)(2)$

$$= (\sqrt{161})(\sqrt{314})\sin 55° \simeq 184.2$$

(15) تقع ذرة الكربون في جزيء الميثان في نقطة الأصل، وتقع ذرات الهيدروجين عند النقاط S و R و Q و P في الشكل المجاور، جد قياس الزاوية بين $\vec{OR}$ و $\vec{OS}$ اللذين يمثلان رابطة ذرة الكربون بذرتي الهيدروجين عند النقطة S والنقطة R



الحل:

$\vec{OR} = \langle -1, 1, 1 \rangle$

$\vec{OS} = \langle -1, -1, -1 \rangle$

$\vec{OR} \cdot \vec{OS} = 1 - 1 - 1 = -1$

$|\vec{OS}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ ، $|\vec{OR}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)$

$\theta \approx 109.5°$

إذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ p \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 والنقطة $A(9,-1,-14)$ تقع على المستقيم l_1 والنقطة C تقع على المستقيم l_2

أجب عن الأسئلة الآتية:

(16) إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متعامدان جد قيمة q

(17) إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متقاطعين، جد قيمة p وما إحداثيات نقطة تقاطعهما

(18) رسمت دائرة مركزها النقطة C فقطعت المستقيم l_1 في النقطتين A و B جد متجه الموقع للنقطة B

الحل :- (16) اتجاه l_1 : $\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ ، اتجاه l_2 : $\begin{pmatrix}q\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}q\\2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}=0$$

$$-q+6-2=0 \rightarrow q=4$$

(17) نساوي $\vec{r}$ لخطيهما فتقاطعهما ، حيث $q=4$

$$\langle 8-t,\ 2+3t,\ -12+2t\rangle=\langle -4+4u,\ 10+2u,\ p-u\rangle$$

$8-t=-4+4u$ — (1)

$2+3t=10+2u$ — (2)

$-12+2t=p-u$ — (3)

بحل معادلة (1) مع (2) ينتج

$t=4$ و $u=2$

نعوض في معادلة (3) :-

$-12+8=p-2$

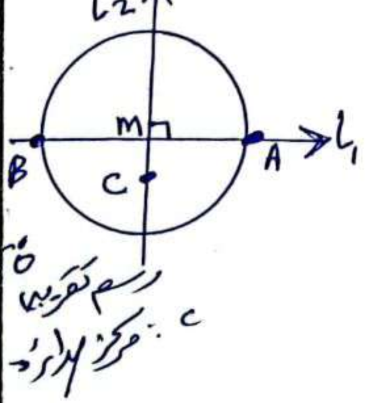
$\boxed{p=-2}$

عند $t=4$ نعوض لمعرفة نقطة التقاطع $M(8-4,\ 2+12,\ -12+8)=(4,14,-4)$

(18) نفرض نقطة تقاطع المستقيمين l_1 و l_2 هي $m(4,14,-4)$

وبما أن العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه

فان النقطة m هي منتصف $\overline{AB}$



رسم تقريبي

C : مركز الدائرة

O نقطة الأصل

نفرض احداثي $B(x,y,z)$

$$\left(\frac{x+9}{2},\ \frac{-1+y}{2},\ \frac{-14+z}{2}\right)=(4,14,-4)$$

بالمقارنة

$x=-1,\ y=29,\ z=6$

$$B(-1,29,6)\rightarrow \vec{OB}=\begin{pmatrix}-1\\29\\6\end{pmatrix}$$

$$\vec{OB}=\vec{OA}+\vec{AB}$$

حل آخر

$$\vec{OB}=\vec{OA}+2\vec{AM}$$
$$=\langle 9,-1,-14\rangle+2\langle -5,15,10\rangle$$
$$=\langle -1,29,6\rangle$$

د/أفنان ابراهيم صباغ

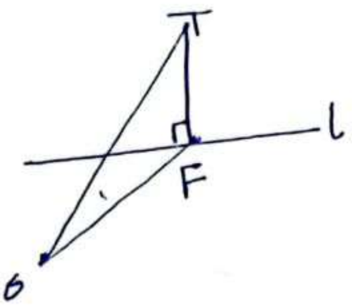
اذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix}-19\\14\\-5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-3\\a\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1

والنقطة $T(-2,5,8)$ تقع خارج المستقيم l والنقطة F تقع على المستقيم l حيث $\overrightarrow{TF}$ يعامد المستقيم l، اجب عما يلي:

(19) بيّن ان قيمة t التي تمثل النقطة F على المستقيم l هي $t=\dfrac{13a+44}{a^2+10}$

(20) اذا كانت $t=5$ في الفرع السابق، جد متجه الموقع الممكن للنقطة F

الحل:



(19)

F تقع على المستقيم l وعليه

$\overrightarrow{OF} = \langle -19+t, 14-3t, -5+at \rangle$

$\overrightarrow{OT} = \langle -2, 5, 8 \rangle$

$\overrightarrow{TF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OT}$

$\overrightarrow{TF} = \langle -17+t, 9-3t, -13+at \rangle$

$\overrightarrow{TF} \perp l$ وعليه:

$\langle -17+t, 9-3t, -13+at \rangle \cdot \langle 1, -3, a \rangle = 0$

$-17+t-27+9t-13a+a^2t=0$

$10t+a^2t=13a+44$

$t(10+a^2)=13a+44 \rightarrow t=\dfrac{13a+44}{10+a^2}$

(20) عوض $t=5$ حيث نحتاج الى a:

$5=\dfrac{13a+44}{10+a^2} \rightarrow 50+5a^2=13a+44$

$5a^2-13a+6=0$

$(5a-3)(a-2)=0$

$a=\frac{3}{5}$ ، $a=2$

عند $a=2$، $t=5$ ← $\overrightarrow{OF} = \langle -19+5, 14-15, -5+10 \rangle = \langle -14, -1, 5 \rangle$

عند $a=\frac{3}{5}$، $t=5$ ← $\overrightarrow{OF} = \langle -19+5, 14-15, -5+3 \rangle = \langle -14, -1, -2 \rangle$

إحداثيات النقاط A و B و C هي $(3,-2,4)$ و $(1,-5,6)$ و $(-4,5,-1)$ ،
على الترتيب، المستقيم l يمر بالنقطة A وله المعادلة المتجهة :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

21) بيّن أن النقطة C تقع على المستقيم l

22) جد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطة A والنقطة B

23) إذا وقعت النقطة D على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B بحيث كانت الزاوية CDA قائمة، جد إحداثيات النقطة D.

الحل :

21)
$$\langle -4, 5, -1\rangle = \langle 3+7u, -2-7u, 4+5u\rangle$$

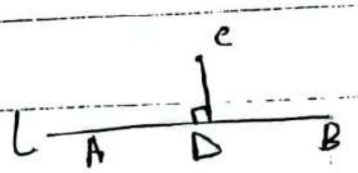
$-4 = 3+7u \rightarrow u=-1$

$5 = -2-7u \rightarrow u=-1$

$-1 = 4+5u \rightarrow u=-1$

وعليه C تقع على المستقيم l المعطى حيث ننتج من تعويض $u=-1$ في معادلته المتجهة

22) المطلوب



$\overrightarrow{AB} = \langle 1-3, -5+2, 6-4\rangle = \langle -2, -3, 2\rangle$

$\vec{r} = \langle 3, -2, 4\rangle + t\langle -2, -3, 2\rangle$

23) النقطة D تقع على المستقيم ← تحقق معادلته

$\overrightarrow{OD} = \langle 3-2t, -2-3t, 4+2t\rangle$

$\overrightarrow{CD} = \langle 3-2t+4, -2-3t-5, 4+2t+1\rangle = \langle 7-2t, -7-3t, 5+2t\rangle$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \rightarrow \langle 7-2t, -7-3t, 5+2t\rangle \cdot \langle -2, -3, 2\rangle = 0$

$\boxed{\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}}$

$-14+4t+21+9t+10+4t=0$

$17t = -17 \rightarrow t=-1$

$D(3+2, -2+3, 4-2) = (5, 1, 2)$

اذا كانت $\vec{r}=\begin{pmatrix}8\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت $\vec{r}=\begin{pmatrix}-9\\21\\-4\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، اجب عما يلي :-

(24) بيّن ان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متعامدان.

(25) بيّن ان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 يتقاطعان في النقطة $(-2,7,10)$

(26) : يقع كل رأس من رؤوس المربع ABCD اما على المستقيم l_1 واما على المستقيم l_2 اذا كانت احداثيات الرأس A هي :- $(-5,13,4)$ جد احداثيات رؤوس الثلاثة الأخرى.

الحل :-

(24) اتجاه المستقيم الاول l_1 :- $\vec{V}=\langle 2,-1,-2\rangle$

اتجاه المستقيم الثاني l_2 :- $\vec{W}=\langle 1,-2,2\rangle$

$\vec{V}\cdot\vec{W}=2+2-4=0$

وعليه متعامدان لان $\vec{V}\cdot\vec{W}=0$

(25) نساوي $\vec{r}$

$\langle 8+2t,2-t,-2t\rangle=\langle -9+u,21-2u,-4+2u\rangle$

$8+2t=-9+u$ — (1)

$2-t=21-2u$ — (2)

$-2t=-4+2u$ — (3)

بحل معادلة (1) مع (3) نستنتج

$u=7$, $t=-5$

نتحقق في معادلة (2) :-

$2-t=21-2u$

$2+5=21-14$ ✓

وعليه يتقاطع المستقيمان

عند $t=-5$

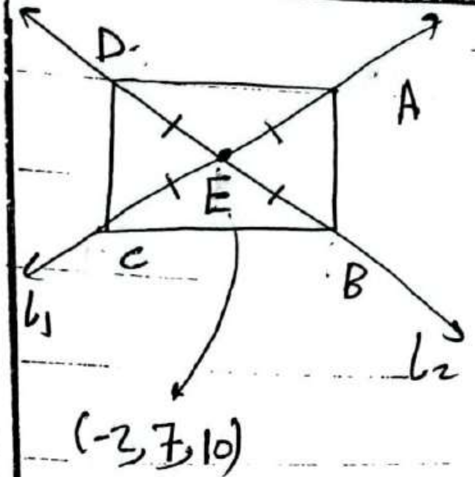
$\vec{r}=\langle 8-10,2+5,-2(-5)\rangle$

$=\langle -2,7,10\rangle$

احداثي نقطة التقاطع

$(-2,7,10)$

مراقب صابح



النقطة A تقع على المستقيم l_2
"نتبع خطوات الدرس الماضي"

(-2,7,10) نقطة تقاطع قطري المربع
لأن قطرا المربع متقاطعان
اخرض احداثي
$C(x,y,z)$
$$\left(\frac{x+^-5}{2}, \frac{y+13}{2}, \frac{4+z}{2}\right) = (-2,7,10)$$
بالمقارنة $x=1, y=1, z=16$
احداثي C : $(1,1,16)$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{DP}$$

النقطة B تقع على المستقيم l_1 وبالتالي تحقق معادلته
$$B(8+2t, 2-t, -2t)$$
لكن $\overline{AE} = \overline{BE}$

$$\overline{AE} = \sqrt{(-2+5)^2+(7-13)^2+(10-4)^2} = 9$$
$$\overline{BE} = \sqrt{(8+2t+2)^2+(2-t-7)^2+(-2t-10)^2} = 9$$
نربع ونحل المعادلة ينتج
$$t = ^-2, \quad t = ^-8$$
عند $t=-8$ فان $B(8-16, 2+8, 16) = (-8,10,16)$
عند $t=-2$ فان $B(8-4, 2+2, 4) = (4,4,4)$
وهذه تمثل النقطة D أيضا ان $D(4,4,4)$ أو بالعكس
رؤوس المربع هي :
$$A(-5,13,4), B(-8,10,16), C(1,1,16), D(4,4,4)$$

راقت صاحب

اختبار نهاية الوحدة

اختار رمز الاجابة الصحيحة في كل مما يأتي :-

1) اذا كانت $B(5,-2,3)$ و $A(-3,4,9)$ فان الصورة الاحداثية المتجه $\overrightarrow{AB}$ هي :-

a) $\langle -2,2,12\rangle$ b) $\langle 8,-6,-6\rangle$ c) $\langle -1,1,6\rangle$ d) $\langle -8,6,-6\rangle$

الحل :-

$$\overrightarrow{AB}=\langle 5+3,-2-4,3-9\rangle=\langle 8,-6,-6\rangle$$

2) اذا كان $\vec{V}=\langle 2,c,-5\rangle$ وكان $|\vec{V}|=3\sqrt{5}$ فان c تساوي

a) 4 b) $-3,5$ c) 15 d) $-4,4$

الحل :- نربع

$$|\vec{V}|=\sqrt{4+c^2+25}=3\sqrt{5}$$

$$c^2+29=45 \longrightarrow c^2=45-29=16$$

$$c=4,-4$$

3) اذا كان PQR مستقيماً ، حيث $PQ:QR=3:1$ و $\overrightarrow{PQ}=\vec{a}$ فان التعبير عن المتجه $\overrightarrow{RQ}$ بدلالة $\vec{a}$ هو :

a) $\frac{1}{3}\vec{a}$ b) $\frac{1}{4}\vec{a}$

c) $\frac{-1}{3}\vec{a}$ d) $\frac{-1}{4}\vec{a}$

الحل :-

$$\frac{PQ}{QR}=\frac{3}{1}$$

$$PQ=3QR$$

$$QR=\frac{1}{3}PQ$$

$$\overrightarrow{QR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{RQ}=-\frac{1}{3}\vec{a}$$

رأفت صابحي

4) النقطة الواقعة على المستقيم الذي له المعادلة المتجهة :
$\vec{r} = \langle 4, -2, 5\rangle + t\langle -2, 1, 3\rangle$ والاحداثي y لها 10 هي

a) $(18, 10, 28)$ b) $(28, 10, 35)$ c) $(-8, 10, 20)$ d) $(-20, 10, 41)$

الحل :-

احداثي النقطة على المستقيم : $(4-2t, -2+t, 5+3t)$ ،

$-2+t = 10 \rightarrow t = 12$

$(4-24, -2+12, 5+36) \rightarrow (-20, 10, 41) \leftarrow t=12$ نعوض

---

5) اذا كان $\vec{V} = \langle 2, -2, 5\rangle$ وكان $\vec{W} = \langle -3, 4, 6\rangle$ فان $3\vec{V} - 2\vec{W}$

a) $\langle 0, 2, 3\rangle$ b) $\langle 12, -14, 3\rangle$ c) $\langle 13, -16, -8\rangle$ d) $\langle -13, 16, 8\rangle$

الحل :-

$3\vec{V} - 2\vec{W} = 3\langle 2, -2, 5\rangle - 2\langle -3, 4, 6\rangle$
$= \langle 6, -6, 15\rangle + \langle 6, -8, -12\rangle = \langle 12, -14, 3\rangle$

---

6) اذا كان قياس الزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هو $60°$ وكان $\vec{a}\cdot\vec{b} = 30$ وكان $|\vec{a}| = 10$ فان مقدار $\vec{b}$ هو :

a) 3
b) 5
c) 6
d) 24

الحل :-

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\cos 60° = \frac{30}{10|\vec{b}|} = \frac{3}{|\vec{b}|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{|\vec{b}|}$$

$$\boxed{|\vec{b}| = 6}$$

$\boxed{\text{رأفت صابح}}$

7) اذا كان $\vec{u} = \langle -4, 2, a \rangle$ وكان $\vec{v} = \langle 2, b, 5 \rangle$ وكان $\vec{u} \parallel \vec{v}$ فان قيمة a هي :

a) -10

b) -5

c) -1

d) 5

الحل :

$$\langle 2, b, 5 \rangle = k \langle -4, 2, a \rangle$$

$$\langle 2, b, 5 \rangle = \langle -4k, 2k, ka \rangle$$

$$-4k = 2 \rightarrow k = \frac{-1}{2}$$

$$5 = ka \rightarrow a = \frac{5}{k} = \frac{5}{\frac{-1}{2}} = -10$$

---

8) اذا كان المتجه $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ والمتجه $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ q \end{pmatrix}$ متعامدين، فان قيمة q هي :

a) 0 b) 8

c) 10 d) 18

الحل :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$$

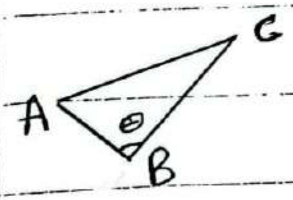
$$30 - 84 + 3q = 0$$

$$3q = 54$$

$$q = \frac{54}{3} = 18$$

---

9) في المثلث المجاور، اذا كانت $\overrightarrow{AB} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ، $\overrightarrow{BC} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ جد قياس الزاوية ABC الى أقرب عشر درجة



هنا نحتاج $\overrightarrow{BA}$

الحل :

$$\overrightarrow{BA} = -3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-3)(-2) + (1)(4) + (-2)(3)$$

$$= 6 + 4 - 6 = 4$$

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{14}\sqrt{29}}\right)$$

$$\theta \simeq 78.5$$

رافت صابحي ٠٥٦٠٠٣٠٠

10) اذا وقعت النقاط $E(2,0,4)$ و $F(h,5,1)$ و $G(3,10,K)$ على مستقيم واحد ، فما قيمة كل من h و K .

الحل :-

بما انها على مستقيم واحد فهي على استقامة واحدة

بمعنى $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{EG}$

$$\overrightarrow{EF} = \langle h-2, 5, -3 \rangle \quad , \quad \overrightarrow{EG} = \langle 1, 10, K-4 \rangle$$

$$\therefore \langle h-2, 5, -3 \rangle = c\langle 1, 10, K-4 \rangle$$

$$h-2 = c \quad —— ①$$

$$5 = 10c \rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$-3 = c(K-4) \quad —— ②$$

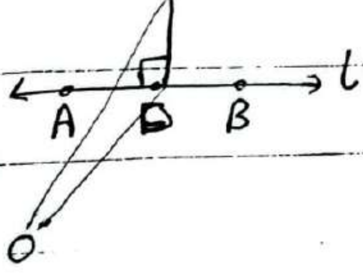
نعوض قيمة (c) في معادلة ① $\leftarrow$ $h-2 = \frac{1}{2} \rightarrow h = \frac{5}{2}$

في معادلة ② $\leftarrow$ $-3 = \frac{1}{2}(K-4) \rightarrow -6 = K-4$

$$K = -2$$

---

11) اذا كانت $A(3,-2,4)$ ، $B(1,-5,6)$ ، $C(-9,5,-1)$ وكانت النقطة D تقع على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B وكانت الزاوية CDA قائمة ، جد احداثي النقطة D .



الحل :- D تمثل مسقط .

نجد معادلة المستقيم $\overrightarrow{AB} = \langle 1-3, -5+2, 6-4 \rangle$

$$\overrightarrow{AB} = \langle -2, -3, 2 \rangle$$

$$\vec{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + t\langle -2, -3, 2 \rangle$$

النقطة D تقع على المستقيم $\overrightarrow{OD} = \langle 3-2t, -2-3t, 4+2t \rangle$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \langle 3-2t+4, -2-3t-5, 4+2t+1 \rangle$$

$$= \langle 7-2t, -7-3t, 5+2t \rangle$$

$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

بحل المعادلة $-2(7-2t) - 3(-7-3t) + 2(5+2t) = 0$

$t = -1$

نعوضها $t = -1 \rightarrow \overrightarrow{OD} = \langle 3+2, -2+3, 4-2 \rangle = \langle 5, 1, 2 \rangle$

وعليه احداثيات D هو $(5, 1, 2)$

اذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1

وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -17 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 اجب عما يلي

(12) جد احداثيات نقطة تقاطع المستقيمين l_1 و l_2

(13) جد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l_1 و l_2

الحل :-

نساوي $\vec{r}_1$ في المعادلتين

(12)

$\langle -2-5\lambda, -5, 9+7\lambda \rangle = \langle -3+2\mu, -17+4\mu, 5-\mu \rangle$

$-2-5\lambda = -3+2\mu$ —— (1)

$-5 = -17+4\mu \rightarrow \mu = 3$

$9+7\lambda = 5-\mu$ —— (2)

نعوض $\mu = 3$ في معادلة (1) :-

$-2-5\lambda = -3+6$

$5\lambda = -5 \rightarrow \lambda = -1$

نعوضها في معادلة (3) :-

$9+7\lambda = 5-\mu$

$9-7 = 5-3$ ✓

نعوض $\lambda = -1$ لمعرفة نقطة التقاطع في معادلة l_1

$(-2+5, -5, 9-7)$

$(3, -5, 2)$

(13) اتجاه المستقيم l_1 $\vec{V} = \langle -5, 0, 7 \rangle$

اتجاه المستقيم l_2 $\vec{U} = \langle 2, 4, -1 \rangle$

$\vec{V} \cdot \vec{U} = -10 + 0 - 7 = -17$

$|\vec{v}| = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$ و $|\vec{u}| = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-17}{\sqrt{74}\sqrt{21}}\right) \approx 115.5^\circ$

قياس الزاوية الحادة : $180 - 115.5^\circ = 64.5^\circ$

اذا كانت $A(1, 4, -5)$ و $B(3, 0, 2)$ و $C(-4, 1, 3)$

اجب عن الاسئلة الاربعة الآتية تباعاً :

(14) اكتب معادلة متجهة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$

(15) اكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$

(16) اذا كان قياس $\angle BAC = \theta$ فاثبت ان :

$$\cos\theta = \frac{58}{7\sqrt{138}}$$

(17) جد مساحة المثلث ABC

الحل :

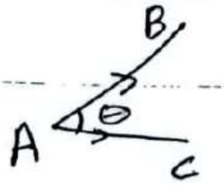
(14) $\overrightarrow{AB} = \langle 3-1, 0-4, 2+5 \rangle = \langle 2, -4, 7 \rangle$

$\vec{r} = \langle 1, 4, -5 \rangle + t\langle 2, -4, 7 \rangle$

(15) $\overrightarrow{AC} = \langle -4-1, 1-4, 3+5 \rangle = \langle -5, -3, 8 \rangle$

$\vec{r} = \langle 1, 4, -5 \rangle + u\langle -5, -3, 8 \rangle$

رافت صابح



(16) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -10+12+56 = 58$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+16+49} = \sqrt{69}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{25+9+64} = \sqrt{98}$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{58}{\sqrt{69}\sqrt{98}}$$

$$\cos\theta = \frac{58}{\sqrt{69}\sqrt{49\times 2}} = \frac{58}{7\sqrt{138}}$$

(17) جتا θ ، $\sin\theta$ وعليه :-

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{3364}{6762}} = \frac{\sqrt{3398}}{7\sqrt{138}}$$

$$Area = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{69}\sqrt{98}\ \frac{\sqrt{3398}}{7\sqrt{138}} = \frac{\sqrt{3398}}{2}$$

---

18) اذا كانت $\vec{r} = \langle 3,-25,13\rangle + t\langle 4,5,-1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l وكانت النقطة V تقع على المستقيم l حيث $l \perp \overline{OV}$ فما احداثيات النقطة V

الحل: V تقع على المستقيم l فان احداثياتها $(3+4t, -25+5t, 13-t)$

$$\overrightarrow{OV} = \langle 3+4t, -25+5t, 13-t\rangle$$

بما ان $l \perp \overline{OV}$ فعليه $\vec{w}\cdot\overrightarrow{OV} = 0$ حيث $\vec{w}$ اتجاه l

$$\langle 3+4t, -25+5t, 13-t\rangle \cdot \langle 4,5,-1\rangle = 0$$

$$12+16t-125+25t-13+t = 0$$

$$42t = 126 \rightarrow t = 3$$

احداثيات V هي: $(3+12, -25+15, 13-3)$

$(15, -10, 10)$

رافت صافي

يمر المستقيم l_1 بالنقطتين E و F ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين G، H حدد اذا كان هذان المستقيمان متوازيين أو متخالفين أو متقاطعين، ثم جد احداثيات نقطة التقاطع اذا كانا متقاطعين في كل مما يأتي :-

(19) $E(7,6,34)$ و $F(5,9,16)$، $G(1,21,-2)$، $H(-13,-14,19)$

(20) $E(-3,-5,16)$ و $F(12,0,1)$، $G(7,2,11)$، $H(1,-22,23)$

---

19) $\overrightarrow{EF} = \langle 5-7, 9-6, 16-34\rangle = \langle -2, 3, -18\rangle$

$\overrightarrow{GH} = \langle -13-1, -14-21, 19+2\rangle = \langle -14, -35, 21\rangle$

غير متوازيان لعدم وجود ثابت تحقق $\langle -2,3,-18\rangle = k\langle -14,-35,21\rangle$

نفحص التقاطع

$\vec{r} = \langle 7,6,34\rangle + t\langle -2,3,-18\rangle$ معادلة l_1

$\vec{r} = \langle 1,21,-2\rangle + u\langle -14,-35,21\rangle$ معادلة l_2

نساوي $\vec{r}$ $\langle 7-2t, 6+3t, 34-18t\rangle = \langle 1-14u, 21-35u, -2+21u\rangle$

$7-2t = 1-14u$ —— (1)

$6+3t = 21-35u$ —— (2)

$34-18t = -2+21u$ —— (3)

بحل معادلة (1) مع (3) ينتج $u = \frac{-6}{49}, t = \frac{15}{7}$

وعند تعويضها في معادلة (3) لا تحققها وعليه المستقيمان غير متقاطعين، وعليه متخالفان

راقت صابحي

20) $\overrightarrow{EF} = \langle 12+3, 0+5, 1-16 \rangle = \langle 15, 5, -15 \rangle \xrightarrow{\text{نبسط}} \langle 3, 1, -3 \rangle$

$\overrightarrow{GH} = \langle 1-7, -22-2, 23-11 \rangle = \langle -6, -24, 12 \rangle \xrightarrow{\text{نبسط}} \langle -1, -4, 2 \rangle$

غير متوازيان لعدم وجود ثابت بحيث $\langle 15, 5, -15 \rangle = k \langle -6, -24, 12 \rangle$

نفحص التقاطع :-

معادلة المستقيم l_1 $\quad \vec{r} = \langle -3, -5, 16 \rangle + t \langle 3, 1, -3 \rangle$

معادلة المستقيم l_2 $\quad \vec{r} = \langle 7, 2, 11 \rangle + u \langle -1, -4, 2 \rangle$

نساوي $\vec{r}$ $\quad \langle -3+3t, -5+t, 16-3t \rangle = \langle 7-u, 2-4u, 11+2u \rangle$

$-3+3t = 7-u$ —— (1)

$-5+t = 2-4u$ —— (2)

$16-3t = 11+2u$ —— (3)

بحل معادلة (1) و (3) ينتج

$u = -5 , t = 5$

نعوض في معادلة (2) :

$-5+t = 2-4u$

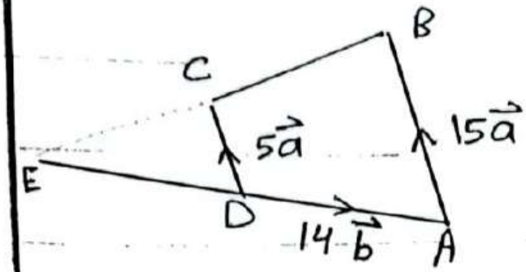
$-5+5 = 2+20$

$0 \neq 22$ X

وعليه المستقيمان غير متقاطعان وعليه متخالفان

راقت صابح

21) في الشكل الرباعي $ABCD$ ، مُد AD على استقامته ليصل الى النقطة E ، حيث $AD = 2DE$ اذا كان $\overrightarrow{DA} = 14\vec{b}$ وكان $\overrightarrow{DC} = 5\vec{a}$ وكان $\overrightarrow{AB} = 15\vec{a}$ فاثبت ان B و C و E على استقامة واحدة



الحل :-

نثبت ان $\overrightarrow{EB} \parallel \overrightarrow{EC}$

نكتب كل منهما بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}$$
$$= (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) + 15\vec{a}$$
$$= 7\vec{b} + 14\vec{b} + 15\vec{a}$$
$$= 21\vec{b} + 15\vec{a}$$
$$= 3(7\vec{b} + 5\vec{a}) \quad \text{—— } 1$$

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DE}$$
$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$
$$= \frac{1}{2}(-14\vec{b})$$
$$= -7\vec{b}$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$$
$$= 7\vec{b} + 5\vec{a} \quad \text{—— } 2$$

من معادلة 1 و 2 فان :-

$$\overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{EC}$$

وهذا يعني ان $\overrightarrow{EB} \parallel \overrightarrow{EC}$

لكن المتجهين ينطلقان من النقطة E نفسها وعليه النقاط E و C و B تقع على استقامة واحدة

رافت صباحي